



Interactions non-linéaires d'ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant

Guilhem Bordes

► To cite this version:

Guilhem Bordes. Interactions non-linéaires d'ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant. Autre [cond-mat.other]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2012. Français. NNT : 2012ENSL0731 . tel-00733175

HAL Id: tel-00733175

<https://theses.hal.science/tel-00733175>

Submitted on 18 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'École Normale Supérieure de Lyon
Spécialité : **Physique**
Laboratoire de Physique
École Doctorale de Physique et Astrophysique de Lyon
présentée et soutenue publiquement
par

Guilhem Bordes

le 16 Juillet 2012

Interactions non-linéaires d'ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant

Directeur de thèse : **Thierry DAUXOIS**
Co-directeur de thèse : **Jan-Bert FLÓR**

Après avis de :

M. Fabien GODEFERD, rapporteur
M. Patrice MEUNIER, rapporteur

Devant la commission formée de :

M. Thierry DAUXOIS, directeur de thèse
M. Jan-Bert FLÓR, co-directeur de thèse
M. Fabien GODEFERD, rapporteur
M. Patrice MEUNIER, rapporteur
M. Thomas PEACOCK, examinateur
Mme. Chantal STAQUET, présidente du jury

Remerciements

Je tiens à remercier Thierry Dauxois pour son soutien sans faille durant ces trois ans. Son dynamisme, sa gentillesse, et sa disponibilité m'ont permis d'orienter au mieux mes travaux. Malgré son recrutement orienté, je n'ai finalement jamais intégré l'équipe de football du laboratoire, ni celle de vélo. Merci Thierry.

Je remercie également Jan-Bert Flór pour m'avoir encadré sur la partie tourbillons de cette thèse, dans la continuité de mon stage de M2.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse, Patrice Meunier et Fabien Godeferd pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : Chantal Staquet et Thomas Peacock avec lequel j'ai partagé mes quarts de nuit lorsque nous étions isolés au beau milieu de l'océan Pacifique sur le catamaran dédié aux mesures en mer.

Je voudrais remercier toute l'équipe « Ondes internes », Philippe, Sylvain, Baptiste et Hélène, ainsi que Marine et James lors de leur passage, pour les discussions fructueuses que nous avons eues, et la bonne ambiance régnant au sein du groupe. Je remercie Matthieu, qui m'a précédé, pour le transfert de connaissances qu'il a effectué et son aide précieuse au début de ma thèse. Je voudrais remercier particulièrement Antoine pour ses contributions aux travaux présentés.

Je remercie de tout cœur Pierre-Philippe et Frédéric pour leur accueil chaleureux au sein du laboratoire FAST à Orsay.

Je remercie Louis, Joël, Samuel et Henri pour leur aide précieuse lors de mon passage sur feu Coriolis I. Il n'est pas toujours évident de se familiariser avec une plateforme tournante aussi grande.

Je remercie le rez-de-chaussée du laboratoire, Cendrine, Eric et Martin pour leur bonne humeur lors des pauses café de midi. Mais je voudrais surtout remercier Aude pour m'avoir supporté pendant ces trois ans. Je remercie également tous les autres membres du laboratoire que je n'ai pas cités.

Ma dernière pensée est destinée à Cécile qui m'a soutenu dans les moments difficiles de la thèse. Je lui dois également une fière chandelle pour les nombreuses corrections apportées au manuscrit.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Introduction	1
1 Mécanismes ondulatoires dans les fluides stratifiés ou tournants . . .	1
1.1 Fluides stratifiés	1
1.2 Fluides tournants	2
2 Les ondes gravito-inertielles à l'échelle de la Terre	2
3 Plan du manuscrit	4
1 Physique des ondes internes et des ondes inertielles	5
1 Équations du mouvement	5
1.1 Stabilité des fluides stratifiés	5
1.2 Ondes internes	6
1.3 Ondes inertielles	8
2 Ondes gravito-inertielles	11
3 Conclusion	11
2 Observation des ondes au laboratoire	13
1 Introduction	13
2 Obtention d'un fluide stratifié	13
3 Mesure de la stratification	15
4 Techniques de visualisation	16
4.1 Schlieren synthétique dans le cas des fluides stratifiés	16
4.2 Vélocimétrie par imagerie de particules	16
4.3 Lignes de colorant	17
5 Génération des ondes au laboratoire	18
6 Conclusion	20
3 Instabilité paramétrique sous-harmonique d'ondes inertielles	21
Abstract	21
1 Introduction	21
2 Inertial plane wave generation	23
2.1 Structure of a plane inertial wave	23
2.2 Generation of a plane inertial wave	25
2.3 PIV measurements	26
3 Subharmonic instability	27

3.1	Experimental observations	27
3.2	Helical modes	29
3.3	Resonant triads	31
3.4	Experimental verification of the resonance condition	32
4	Selection of the most unstable resonant triad	34
4.1	Maximum growth rate criterion	34
4.2	Selection of the most unstable wavenumbers	35
4.3	Dependence of the secondary waves properties on the primary wave frequency	36
5	Discussion and conclusion	37
6	Annexe : génération d'ondes planes inertielles, problèmes et solutions	40
7	Bilan	42
4	Écoulement moyen induit par des ondes internes de gravité	43
	Résumé	43
1	Introduction	43
2	Système expérimental	44
3	Résultats expérimentaux	45
4	Interprétation	47
5	Phénomène de rétroaction	52
6	Conclusion	54
5	Génération expérimentale de tourbillons en fluide stratifié	57
	Résumé	57
1	Tourbillons lenticulaires en milieu stratifié non tournant.	58
1.1	Échelle caractéristique	58
1.2	Système expérimental	58
1.3	Modèle	60
1.4	Résultats	64
1.5	Conclusion	69
2	Tourbillons lenticulaires en fluide stratifié tournant	70
2.1	Échelles caractéristiques en milieu stratifié tournant	70
2.2	Protocole expérimental	71
2.3	Résultats	73
3	Vorticité potentielle	76
4	Rapport d'aspect et profil de densité	79
5	Conclusion	80
	Conclusion	81
	Bibliographie	83

Introduction

Au sein des fluides tournants et des fluides stratifiés peuvent exister deux types d'ondes dispersives anisotropes, appelées respectivement ondes inertielles et ondes internes de gravité. Elles jouent un rôle majeur dans la dynamique des écoulements astrophysiques et géophysiques. De façon générale, on parle souvent d'ondes gravito-inertielles lorsque stratification et rotation sont couplées. Sur Terre, l'océan et l'atmosphère sont deux fluides tournants et stratifiés. L'océan est stratifié par la variation avec la profondeur de la température et de la salinité. L'atmosphère quant à elle est stratifiée en température.

Dans cette brève introduction, nous présenterons le mécanisme général régissant les ondes internes de gravité et les ondes inertielles, et nous présenterons également le contexte géophysique dans lequel ces ondes sont étudiées sur Terre. Les solutions particulières donnant lieu à des écoulements tourbillonnaires seront abordées dans le dernier chapitre.

1 Mécanismes ondulatoires dans les fluides stratifiés ou tournants

La présence d'ondes dans les fluides stratifiés et/ou tournants est due à une force de rappel. Cette force est la poussée d'Archimède dans le cas des fluides stratifiés et la force de Coriolis dans le cas des fluides tournants.

1.1 Fluides stratifiés

Si l'on considère une particule de fluide de densité ρ_1 dans un fluide homogène de densité ρ_2 , la résultante du poids et de la poussée d'Archimède s'écrit (par unité de volume), dans un repère $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ avec \mathbf{e}_z opposé à la gravité,

$$\mathbf{F}_A = -(\rho_1 - \rho_2)g\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Si on suppose une stratification moyenne $\bar{\rho}(z)$, une particule de fluide de densité ρ_1 sera à l'équilibre à l'altitude z_1 telle que $\rho(z_1) = \rho_1$ et sa dynamique suit l'équation du mouvement

$$\rho_1 d\tau \mathbf{a} = -(\rho_1 - \bar{\rho}(z))d\tau g\mathbf{e}_z, \quad (2)$$

où $d\tau$ est le volume de la particule de fluide et \mathbf{a} son accélération. On a donc en prenant l'origine en z_1 ,

$$\ddot{z} = \frac{g}{\rho_1} \frac{d\bar{\rho}}{dz} z = -N^2 z. \quad (3)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation N , appelée pulsation de Brunt-Väisälä, qui dépend a priori de z . Un fluide stratifié possède donc une pulsation propre d'oscillation selon la verticale, notée N . Cette pulsation dépend du gradient de densité du fluide et s'écrit

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\bar{\rho}(z)} \frac{d\bar{\rho}}{dz}(z)}. \quad (4)$$

Les ondes dites *internes* sont à rapprocher des ondes dites *de surface*. La force gravitationnelle pour les ondes de surface est liée à la différence de densité entre l'air et l'eau, alors que pour les ondes internes de gravité, la force dépend de la toute petite différence de densité entre chaque couche de fluide. Comme à l'intérieur de l'océan, la densité ne change au maximum que d'un pour mille sur toute la profondeur, les fréquences des ondes internes sont toujours plus petites que les ondes de surface et sont donc découplées de celles-ci.

1.2 Fluides tournants

Lorsqu'un fluide homogène est en rotation solide, le gradient de pression équilibre la force centrifuge. L'équilibre est stable : si une particule de fluide est déplacée radialement vers l'extérieur par rapport à l'axe de rotation, la vitesse azimutale dans le référentiel galiléen sera plus faible que la vitesse de rotation solide à la nouvelle position, à cause de la conservation du moment cinétique de la position précédente. Dans le référentiel tournant, la particule commence à décrire un mouvement opposé à la rotation de fond. Inversement, si la particule est déplacée radialement vers l'intérieur par rapport à l'axe de rotation, par conservation du mouvement cinétique, la particule voit sa vitesse azimutale augmenter et décrit un mouvement dans le sens de la rotation de fond. Dans le référentiel tournant, la particule ressent la force de Coriolis, $\mathbf{F}_C = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (par unité de masse), avec $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur rotation et \mathbf{u} la vitesse du fluide dans le référentiel tournant. En l'absence de viscosité, la particule de fluide déplacée commence à osciller, en décrivant des cercles dans le sens opposé à la rotation de fond, en rotation anticyclonique, avec une pulsation $f = 2|\boldsymbol{\Omega}|$, appelée paramètre de Coriolis. Ce paramètre f est le pendant pour les fluides tournants de la pulsation de Brunt-Väisälä N . On verra plus tard qu'une équation d'onde commune régit les déplacements de fluide dans les fluides tournants et les fluides stratifiés.

2 Les ondes gravito-inertielles à l'échelle de la Terre

Les écoulements à grande échelle dans les océans et l'atmosphère montrent une grande variété de phénomènes de dynamique des fluides, sur des échelles spatiales et temporelles très larges. Les ingrédients essentiels qui doivent être pris en compte dans ces écoulements à grande échelle sont la présence d'une rotation de fond planétaire et/ou une stratification en densité du milieu. Les ondes internes dans l'océan sont également régies par la rotation de la Terre, à travers le paramètre de Coriolis $f = 2\Omega \sin \phi$, pour une latitude ϕ donnée, avec Ω la vitesse de rotation de la Terre. Le paramètre de Coriolis est compris entre $f = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$ aux

2. LES ONDES GRAVITO-INERTIELLES À L'ÉCHELLE DE LA TERRE

pôles et 0 à l'équateur. La pulsation de Brunt-Väisälä N varie entre 10^{-2} rad.s $^{-1}$ dans la thermocline à 10^{-3} rad.s $^{-1}$ dans l'océan profond. Elle peut être mesurée à l'aide de prélèvements le long de la profondeur en établissant des mesures de salinité et température. La figure 1 est l'exemple d'un profil d'une campagne de mesures océanographiques à laquelle j'ai participé en mai 2011. Cette campagne, dirigée par Shaun Johnston (Scripps Institution of Oceanography), avait pour but de mesurer le taux de modes fondamentaux diffusés par les montagnes sous-marines « Line Islands Ridge » [30] au sud-ouest de l'archipel d'Hawaï. La figure 1(b) montre la valeur de N le long de la profondeur, tel que $N = \sqrt{-(g\Delta\rho)/(\rho\Delta z)}$. Cette grandeur a été

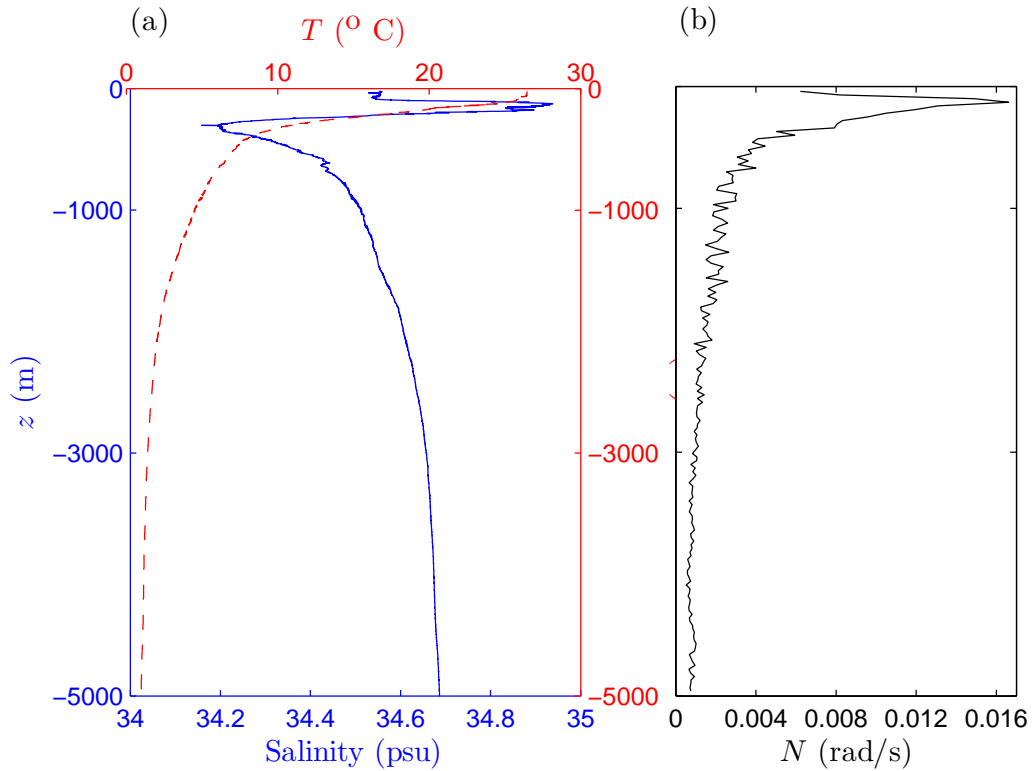


FIGURE 1 – Profils de température (en pointillé) et de salinité (en trait plein) sur l'image (a) et profil de la pulsation de Brunt-Väisälä $N(z)$ associée sur l'image (b), en fonction de la profondeur, mesurés aux abords de « Line Islands Ridge » [17 17.912'N, 168 35.318'W] le 4 mai 2011 au sud de l'archipel d'Hawaï.

évaluée pour une variation de la densité tous les $\Delta z = 20$ m. Cependant, la valeur de N n'a une valeur précise que si l'on détaille l'échelle spatiale des ondes que l'on observe. Les modes verticaux présents dans l'océan ne sont pas sensibles à de faibles variations de N . A l'inverse, des faisceaux émis par des reliefs sous-marins ont une longueur d'onde beaucoup plus petite. Il faut alors affiner la valeur locale de $N(z)$, en prenant un incrément spatial plus petit.

En général, on n'étudie pas spécifiquement des ondes internes pures dans l'océan.

La rotation de fond planétaire induit une petite modification des ondes internes, dont on néglige souvent la partie inertielle, à cause de l'écart entre f et N . En toute rigueur, on devrait parler d'ondes gravito-inertielles, mais on utilise souvent le terme d'ondes internes de gravité à cause de l'effet prépondérant de la stratification. Cependant, l'étude des ondes inertielles en elles-mêmes permet de mieux comprendre les mécanismes profonds agissant sur les fluides en rotation à travers une décomposition modale des champs de vitesse associés. Le couplage des deux effets permet d'avoir une vision globale des mécanismes agissant sur les fluides tournants et stratifiés.

3 Plan du manuscrit

Pour une prise en compte précise des phénomènes étudiés, on discutera principalement les effets de la rotation et de la stratification séparément, avant de rendre compte des phénomènes dans lesquels ils interviennent de façon couplée. On se restreindra seulement à la dynamique des fluides étudiés, c'est-à-dire que l'on ne considèrera pas les effets radiatifs, la thermodynamique et la chimie des fluides considérés. Dans une première partie, on rappellera la physique des ondes étudiées (chapitre 1), avant d'aborder les techniques expérimentales d'observation en laboratoire et la façon de les générer (chapitre 2). Puis on montrera que les ondes gravito-inertielles peuvent se dissiper à travers le mécanisme d'instabilité paramétrique sous-harmonique, en se focalisant uniquement sur la partie inertielle de ces ondes (chapitre 3). Ensuite, on évoquera le fait que les ondes internes peuvent générer des écoulements moyens très forts sous certaines conditions (chapitre 4). Ce mécanisme expliquerait le déplacement d'importantes masses de fluide à l'intérieur de l'océan et la biodiversité associée. Enfin, on se demandera comment les ondes internes peuvent interagir avec d'autres écoulements lents à l'échelle mésoscopique, comme des lentilles tourbillonnaires, en étudiant la stabilité de ces lentilles en fluide stratifié tournant et non tournant (chapitre 5). Enfin, on établira quelques conclusions avant de proposer des perspectives.

Chapitre 1

Physique des ondes internes et des ondes inertielles

1 Équations du mouvement

1.1 Stabilité des fluides stratifiés

On considère un fluide non tournant dont la densité varie avec la hauteur dans un système de coordonnées cartésiennes $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ avec \mathbf{e}_z opposé à la gravité. Si on appelle $\mathbf{x}=(x,y,z)$ les coordonnées d'espace et t le temps, alors les équations du mouvement pour un fluide stratifié incompressible, initialement à l'équilibre hydrostatique, s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' - \frac{\rho'}{\rho} g \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ est le champ de vitesse en coordonnées cartésiennes, $P(\mathbf{x}, t)$ et $\rho(\mathbf{x}, t)$ sont les champs de pression et densité, ν est la viscosité cinématique et g la gravité. On note les variations de la densité et de la pression par rapport à l'équilibre hydrostatique sous la forme

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t), \quad (1.3)$$

$$P(x, y, z, t) = P_0(z) + p'(x, y, z, t). \quad (1.4)$$

L'équation décrivant la dynamique de la densité $\rho(\mathbf{x}, t)$, s'écrit

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \zeta \Delta \rho. \quad (1.5)$$

où ζ est le coefficient de diffusion massique de l'agent stratifiant. On voit ici directement que le laplacien est nul dans le cas d'un fluide stratifié linéairement. On a donc une grande stabilité des fluides stratifiés. Il est très difficile d'homogénéiser un fluide stratifié qui retrouve rapidement sa stratification d'origine après avoir été légèrement mélangé. On peut réécrire l'équation (1.5) sous la forme adimensionnée (grandeurs tildées) suivante

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\rho} = \frac{1}{Re Sc} \Delta \tilde{\rho}, \quad (1.6)$$

où Re est le nombre de Reynolds et $Sc = \nu/\zeta \sim 700$ le nombre de Schmidt pour l'eau salée. On peut négliger le terme diffusif si $Re > 1/Sc$, ce qui est largement le cas dans nos expériences à petite échelle pour des nombres de Reynolds proches de l'unité, et d'autant plus dans l'océan, pour des nombres de Reynolds plus élevés. On utilisera alors l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.7)$$

1.2 Ondes internes

Utilisons les équations (1.1), (1.2) et (1.7) en se restreignant au cas d'un écoulement invariant selon la dimension horizontale y . On peut alors utiliser une fonction de courant $\psi(x, z)$ telle que $\mathbf{u} = (\partial_z \psi, 0, -\partial_x \psi)$. En utilisant le Jacobien $J(f, g) = \partial_x f \partial_z g - \partial_x g \partial_z f$, on peut réécrire les équations précédentes sous la forme

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \rho_0}{g} \partial_x \psi = 0, \quad (1.8)$$

$$\partial_{tz} \psi + J(\partial_z \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho} \partial_x p' + \nu \partial_z \Delta \psi, \quad (1.9)$$

$$-\partial_{tx} \psi - J(\partial_x \psi, \psi) = -\frac{1}{\rho} \partial_z p' - \nu \partial_x \Delta \psi - \frac{1}{\rho} \rho' g, \quad (1.10)$$

avec $N^2(z) = -(g/\rho_0(z)) \partial_z \rho_0(z)$. On considère que les échelles de variations de ψ sont faibles devant l'échelle de variation verticale de $\rho_0(z)$. Comme on ne sait pas résoudre analytiquement ce système d'équations, on utilise l'approximation de Boussinesq, qui néglige les variations de densité par rapport à la densité moyenne $\rho_0(z)$ sauf dans le terme de poussée d'Archimède $\rho' g$, source des oscillations. Pour éliminer la pression, les équations (1.9) et (1.10) sont combinées et on obtient finalement

$$\partial_t \rho' + J(\rho', \psi) + \frac{N^2 \rho_0}{g} \partial_x \psi = 0, \quad (1.11)$$

$$\partial_t \Delta \psi + J(\Delta \psi, \psi) = \frac{g}{\rho_0(z)} \partial_x \rho' + \nu \Delta^2 \psi. \quad (1.12)$$

Ces deux équations décrivent la dynamique non-linéaire des fluides stratifiés tout en tenant compte de la viscosité du fluide. En faisant l'approximation linéaire, on obtient l'équation d'onde suivante pour la fonction de courant ψ

$$\partial_{tt} \Delta \psi + N^2(z) \partial_{xx} \psi = \nu \partial_t \Delta^2 \psi. \quad (1.13)$$

La fréquence propre $N(z)$ dépend de la profondeur. Cette fréquence est élevée dans la thermocline de l'océan où il existe un fort gradient de densité et elle diminue au fur et à mesure que l'on atteint les abysses, comme discuté brièvement dans le chapitre d'introduction.

Approximation linéaire non visqueuse

L'équation d'onde linéarisée sans viscosité pour les ondes internes de gravité s'écrit donc

$$\partial_{tt} \Delta \psi + N^2 \partial_{xx} \psi = 0, \quad (1.14)$$

1. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

où l'on omet de préciser la dépendance en z de N , toujours présente cependant. Si on considère une onde plane solution de l'équation (1.14) de fréquence σ et de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k, 0, m)$ sous la forme

$$\psi(x, z, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (1.15)$$

(où c.c. signifie complexe conjugué), on obtient la relation de dispersion anisotrope suivante pour des ondes internes de gravité

$$\sigma = sN \frac{k}{\kappa} = sN \sin \theta, \quad (1.16)$$

avec $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $s = \pm 1$, et θ l'angle entre \mathbf{k} et la verticale. Cette relation autorise donc quatre directions de propagation suivant les signes respectifs de k et m . On remarquera que la longueur d'onde n'intervient pas dans la relation de dispersion qui relie uniquement la fréquence à la direction du vecteur d'onde. Les vitesses de phase et de groupe de ces ondes dispersives s'écrivent alors

$$\mathbf{c}_\phi = s \frac{N \sin \theta}{\kappa} (\sin \theta, \cos \theta), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{c}_g = s \frac{N \cos \theta}{\kappa} (\cos \theta, -\sin \theta). \quad (1.18)$$

Ces deux vitesses sont orthogonales, une caractéristique non usuelle pour un phénomène ondulatoire.

Atténuation visqueuse

Si l'on veut tenir compte de la dissipation due à la viscosité de l'eau, on revient à l'équation (1.13), en posant $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, et on obtient

$$\sigma_r^2 = N^2 \sin^2 \theta - \frac{\nu^2 \kappa^4}{4}, \quad (1.19)$$

$$\sigma_i = -\frac{\nu \kappa^2}{2}. \quad (1.20)$$

La relation de dispersion des ondes est par conséquent légèrement modifiée. En pratique, il faut une longueur d'onde inférieure ou égale à 1.4 cm pour voir la fréquence varier de 10% ou inférieure ou égale à 4.4 cm pour la voir varier de 1% par rapport à la relation de dispersion en l'absence de viscosité.

On a une atténuation dans le temps de la forme $|\psi| = |\psi_0| e^{\sigma_i t} = |\psi_0| e^{-\nu \kappa^2 t/2}$. Le coefficient d'atténuation selon la direction de propagation $\xi = |\mathbf{c}_g|t$, avec $|\mathbf{c}_g| = |(N/\kappa) \cos \theta|$, module de la vitesse de groupe, vaut

$$\beta = \frac{\nu \kappa^3}{2N |\cos \theta|}. \quad (1.21)$$

1.3 Ondes inertielles

On va montrer que les ondes inertielles suivent une équation d'onde similaire aux ondes internes de gravité. La force de Coriolis fait ici office de force de rappel à la place de la poussée d'Archimède vue précédemment. On se place ici dans le cas d'un fluide non stratifié tournant, contrairement à la situation précédente. Les équations du mouvement pour un fluide homogène incompressible en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = f/2$ autour d'un axe z se mettent sous la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.22)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' - f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (1.23)$$

Dans la suite, on se restreindra également au cas d'un écoulement invariant suivant la direction horizontale y , soit $\partial_y = 0$. Le fluide étant incompressible, la dynamique dans un plan vertical (x, z) peut être décrite ici aussi par une fonction de courant $\Psi(x, z)$, telle que $\mathbf{u} = (\partial_z \Psi, u_y, -\partial_x \Psi)$. Pour de faibles déplacements de fluide, les équations du mouvement linéarisées deviennent

$$\partial_t \partial_z \Psi = -\frac{1}{\rho} \partial_x p' + f u_y + \nu \Delta \partial_z \Psi, \quad (1.24)$$

$$\partial_t u_y = -f \partial_z \Psi + \nu \Delta u_y, \quad (1.25)$$

$$\partial_t (-\partial_x \Psi) = -\frac{1}{\rho} \partial_z p' + \nu \Delta (-\partial_x \Psi). \quad (1.26)$$

On peut écrire $\partial_{zt}(1.24) - \partial_{xt}(1.26)$ et $\partial_z(1.25)$ sous la forme

$$\partial_{tt} \Delta \Psi = f \partial_{zt} u_y + \nu \Delta^2 \partial_t \Psi, \quad (1.27)$$

$$\partial_{zt} u_y = -f \partial_{zz} \Psi + \nu \Delta \partial_z u_y. \quad (1.28)$$

soit

$$\partial_{tt} \Delta \Psi = -f^2 \partial_{zz} \Psi + \nu \Delta^2 \partial_t \Psi + f \nu \Delta \partial_z u_y, \quad (1.29)$$

$$f \partial_z u_y = \partial_t \Delta \Psi - \nu \Delta^2 \Psi + \text{cste}(t). \quad (1.30)$$

On obtient directement par substitution l'équation d'onde suivante

$$\partial_{tt} \Delta \Psi + f^2 \partial_{zz} \Psi = 2\nu \partial_t \Delta^2 \Psi - \nu^2 \Delta^3 \Psi. \quad (1.31)$$

Approximation linéaire non visqueuse

En négligeant la viscosité, l'équation s'écrit sous la forme traditionnelle

$$\partial_{tt} \Delta \Psi + f^2 \partial_{zz} \Psi = 0. \quad (1.32)$$

On remarque que l'équation d'onde pour les ondes internes et inertielles est identique en l'absence de viscosité, l'axe vertical ayant été interverti avec l'axe horizontal. Dans le cas des ondes inertielles, f joue le rôle de N pour les ondes internes de gravité. On peut considérer que l'on est face à un fluide « stratifié » horizontalement en moment

1. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

cinétique. En posant toujours $\mathbf{k} = (k, 0, m)$, σ la pulsation et $\kappa = \sqrt{k^2 + m^2}$, on cherche des solutions sous la forme harmonique suivante,

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)}. \quad (1.33)$$

On a alors la relation équivalente de dispersion anisotrope pour des ondes inertielles

$$\sigma = sf \frac{m}{\kappa} = sf \cos \theta, \quad (1.34)$$

avec $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $s = \pm 1$, et θ l'angle entre \mathbf{k} et l'axe de rotation. Le champ de vitesse correspondant est donné par

$$u_x = im \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (1.35)$$

$$u_y = s\kappa \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (1.36)$$

$$u_z = -ik \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (1.37)$$

On retrouve ici le fait que les particules de fluide décrivent un mouvement circulaire anticyclonique dans des plans inclinés perpendiculaires à \mathbf{k} , comme indiqué sur la figure 1.1(b). Les ondes se déplacent avec une vitesse de phase $\mathbf{c}_\varphi = \sigma \mathbf{k} / \kappa^2$ et une vitesse de groupe $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma$ perpendiculaire à \mathbf{c}_φ . La vorticité $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, donnée par

$$\boldsymbol{\omega} = -s\kappa \mathbf{u}, \quad (1.38)$$

est associée au cisaillement entre les plans isophases. Comme la vitesse et la vorticité sont colinéaires, les ondes inertielles sont aussi appelées ondes h lico idales, et le signe s dans l'équation (1.34) donne le signe de l'hélicité de l'onde $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$, avec $s = +1$ pour une onde dite droit re et $s = -1$ pour une onde dite gauchère. Par exemple, dans le cas classique du motif de la croix de Saint-André émise par un point source [13], les deux faisceaux supérieurs sont dits droitiers et les deux faisceaux inférieurs sont dits gauchers, bien que le mouvement du fluide soit toujours anticyclonique.

Atténuation visqueuse

Dans l'équation (1.31), en posant $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, on a

$$\sigma_r^2 = f^2 \cos^2 \theta, \quad (1.39)$$

$$\sigma_i = -\nu \kappa^2, \quad (1.40)$$

avec $\cos \theta = m/\kappa$. La relation de dispersion avec correction visqueuse est la même que sans viscosité, différence notable avec les ondes internes de gravité. Le coefficient β d'atténuation le long de la direction de propagation est deux fois plus important (en faisant l'analogie $f \equiv N$) que pour les ondes internes de gravité et vaut

$$\beta = \frac{\nu \kappa^3}{f |\sin \theta|} = \frac{\nu \kappa^3}{\sigma |\tan \theta|}. \quad (1.41)$$

En effet, à cause de la trajectoire circulaire des particules de fluide, un cisaillement deux fois plus important est présent : le cisaillement selon la direction y n'existait pas pour les ondes de gravité présentées précédemment.

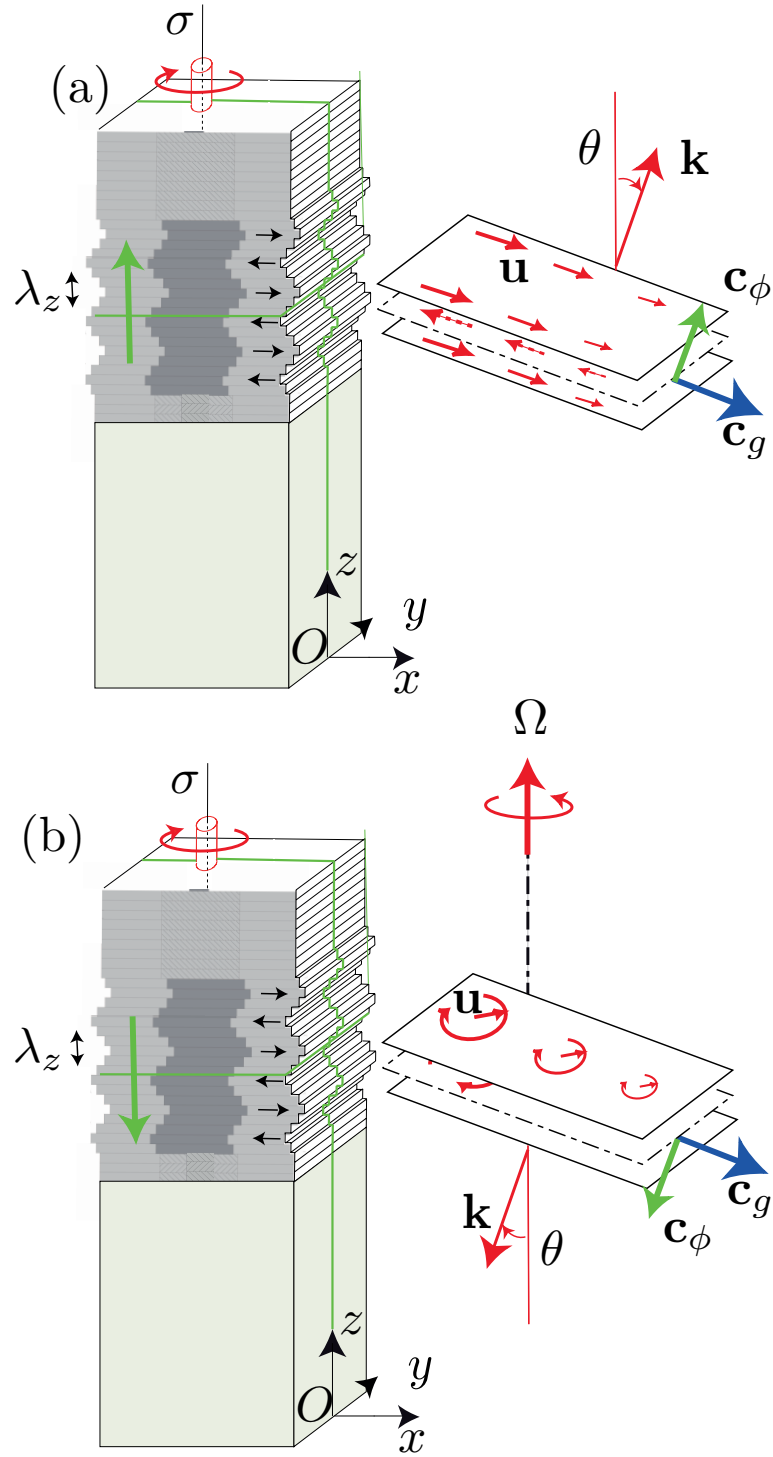


FIGURE 1.1 – Illustration des mouvements du fluide générés par une onde plane bi-dimensionnelle interne de gravité (a), ou inertielle (b), à l'aide du générateur d'onde utilisé pour les expériences.

2 Ondes gravito-inertielles

Lorsque l'on tient compte des deux forces (gravité et force de Coriolis), le vecteur rotation n'est pas aligné avec la pesanteur. On néglige cependant souvent les termes verticaux de la force de Coriolis et on pose un vecteur rotation selon la verticale, de norme $\Omega \sin \phi$, où ϕ est la latitude considérée. Le paramètre de Coriolis effectif pris en compte est $f = 2\Omega \sin \phi$. L'équation de propagation des ondes gravito-inertielles en milieu non visqueux, associée à la fonction de courant Ψ devient

$$\Delta \Psi_{tt} + f^2 \Psi_{zz} + N^2 \Psi_{xx} = 0. \quad (1.42)$$

La relation de dispersion associée à une onde plane de la forme $\Psi = \Psi_0 e^{i(kx+mz-\sigma t)}$ se dérive facilement et on obtient

$$\sigma^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{k^2 + m^2}. \quad (1.43)$$

Les ondes ne sont donc propagatives que lorsque la pulsation est comprise entre f et N . En pratique, dans l'océan ou l'atmosphère, f est de l'ordre de un dixième ou un centième de N suivant les cas et cela fixe donc la limite basse de propagation des ondes.

3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté de manière synthétique les ondes internes de gravité et les ondes inertielles. Nous avons montré qu'elles sont semblables bien que régies par deux forces motrices différentes : la pesanteur à travers la poussée d'Archimède et la force de Coriolis. Régies par les mêmes lois mathématiques, elles montrent des phénomènes similaires que l'on va aborder tout au long de ce manuscrit.

Chapitre 2

Observation des ondes au laboratoire

1 Introduction

Dans cette thèse, il a été choisi d'aborder le problème des ondes internes de façon expérimentale. De nombreux modèles théoriques concernant les phénomènes observés existent et des expériences numériques fonctionnent depuis quelques années de façon convaincante. Cependant, ces expériences numériques simplifient parfois trop le problème ou sont encore trop gourmandes en temps de calcul. Le code utilisé doit être choisi avec précaution suivant le cas étudié. Aussi, la comparaison avec une expérience réelle a toute sa place pour valider les modèles analytiques ou numériques utilisés.

2 Obtention d'un fluide stratifié

En laboratoire, on reproduit de façon idéalisée la stratification observée dans l'océan. On s'intéresse particulièrement aux fluides dont la pulsation de Brunt-Väisälä est constante. Nous nous sommes limités à une densité maximale 4% plus élevée que l'eau douce. On peut considérer alors qu'un fluide stratifié linéairement est une bonne approximation d'un fluide ayant une pulsation N constante. Il faudrait normalement stratifier la cuve avec un profil exponentiel (qui aura tendance par diffusion à se rapprocher d'une stratification linéaire d'après l'équation (1.5)). En pratique, les écarts à la densité moyenne sont faibles et on fait l'approximation N constant pour les gradients linéaires créés.

Pour obtenir de façon pratique une telle stratification linéaire, on utilise la méthode des deux bacs d'Oster [54]. Deux bacs (désignés par les lettres A et B) sont mis en vases communicants et se vident dans la cuve d'expérience C (voir figure 2.1). En pratique, nous avons également utilisé deux pompes péristaltiques qui remplacent le système de vases communicants : une pompe de débit volumique fixé est placée entre le bac B et la cuve de remplissage C, et une autre pompe de débit moitié est placée entre le bac A et le bac B.

Lorsque le remplissage avance, la concentration dans le deuxième bac est modifiée par l'apport en fluide du premier bac. Le rapport des sections des deux bacs, S_A et

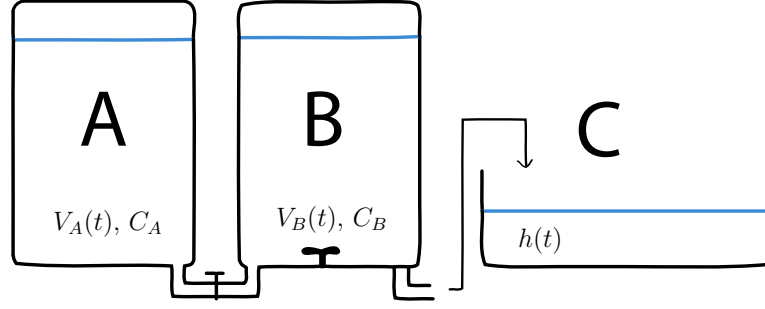


FIGURE 2.1 – Méthode des deux bacs. Le bac A et le bac B (sous agitation) sont mis en vases communicants et se déversent dans la cuve d'expérience. Cette méthode génère de façon simple un gradient linéaire de densité dans cette dernière.

S_B est égal au rapport de leurs volumes $V_A(t)$ et $V_B(t)$ puisque les bacs sont en vases communicants. Lorsque la cuve d'expérience (C) se remplit et voit sa hauteur de fluide h s'élever, elle le fait selon la loi

$$S \frac{dh}{dt} = - \frac{d(V_A + V_B)}{dt} = \left(1 + \frac{S_A}{S_B}\right) \frac{d(V_B(0) - V_B(t))}{dt}, \quad (2.1)$$

où S est la section de la cuve (C). La concentration du fluide dans le bac B n'est modifiée que par l'apport venant de A

$$\frac{dC_B}{dt} = - \frac{C_A - C_B(t)}{V_B} \frac{dV_A}{dt} = \frac{C_B(t) - C_A}{V_B} \frac{S_A}{S_B} \frac{dV_B}{dt}, \quad (2.2)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{V_B} \frac{dV_B}{dt} = \frac{S_B}{S_A} \frac{1}{C_B(t) - C_A} \frac{d(C_B(t) - C_A)}{dt}. \quad (2.3)$$

Cette équation a pour solution

$$V_B(t) = V_B(0) \frac{(C_B(t) - C_A)^{S_B/S_A}}{(C_B(0) - C_A)^{S_B/S_A}}, \quad (2.4)$$

ce qui dans le cas $S_B = S_A$ utilisé donne

$$V_B(t) = V_B(0) \frac{(C_B(t) - C_A)}{(C_B(0) - C_A)}. \quad (2.5)$$

Ainsi, d'après l'équation (2.1), la hauteur h est proportionnelle à la concentration C_B , ce qui correspond bien à un gradient linéaire de concentration,

$$\frac{dC_B}{dh} = \frac{S}{2V_B(0)} (C_B(0) - C_A). \quad (2.6)$$

On peut alors choisir de remplir par le haut si $C_B(0) > C_A$ afin de déposer le fluide le plus léger au-dessus ; c'est ce qui a été effectué à Grenoble au LEGI et à Lyon. À l'inverse, si $C_B(0) < C_A$, on remplit la cuve par le bas, afin de déposer le fluide le plus léger en premier, comme effectué sur la plateforme Coriolis à Grenoble. Lorsque l'on destine une cuve à être remplie d'un fluide stratifié tournant, on prend bien garde à remplir la cuve lorsque cette dernière est déjà en rotation constante.

3 Mesure de la stratification

Le contrôle de la stratification peut s'effectuer de plusieurs manières différentes. La première méthode utilisée est la plus simple possible : on prélève le fluide à différentes hauteurs d'eau et on mesure la densité à l'aide d'un densimètre. En pratique notre densimètre, de marque AntonPaar, est constitué d'un capillaire rempli de la solution à étudier dont on mesure la pulsation propre d'oscillation, dépendante de la masse introduite, à volume fixé. L'appareil permet de mesurer la masse volumique d'un fluide entre 0 et $2 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ avec une précision de $5\cdot 10^{-4} \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ à partir d'un échantillon de 2 mL. Plusieurs prélèvements à différentes hauteurs sur un côté de la cuve permettent de remonter à la stratification.

Cependant, la majorité des stratifications a été mesurée à l'aide d'une sonde conductimétrique couplée à une sonde de température. Un moteur pas à pas fait descendre la sonde de façon continue à l'intérieur du fluide, permettant une mesure très précise de la densité. La tige de la sonde, de diamètre très faible et de vitesse de descente lente, ne perturbe donc le fluide que très légèrement. En étalonnant correctement la sonde à l'aide de plusieurs solutions tests, dont les densités ont été contrôlées avec le densimètre présenté précédemment, on obtient un profil de densité continu du fluide. De plus, on peut suivre la variation de densité au cours du temps en un point en laissant la sonde en un endroit particulier. Cette technique permet un taux d'erreur de moins de 1% sur la mesure de l'écart de densité par rapport à l'eau douce. La figure 2.2 montre la mesure d'une telle stratification obtenue à l'aide de cette méthode. On remarque que près de la surface, une zone plus homogène commence à se former due à l'évaporation de la couche superficielle. L'eau s'échappe de la cuve mais le sel reste, ce qui fait monter la densité de cette couche.

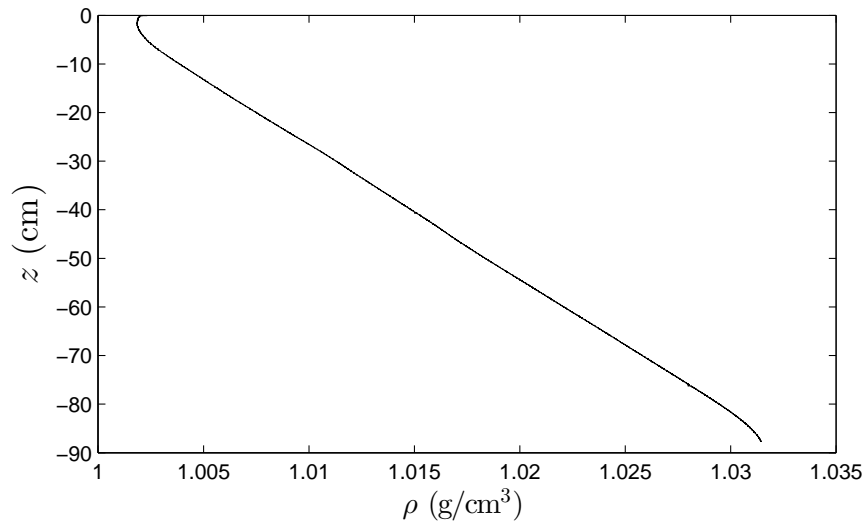


FIGURE 2.2 – Exemple de stratification obtenue à l'aide d'une sonde conductimétrique munie d'un capteur de température lors d'une expérience sur la plateforme Coriolis, pour $N = 0.59 \text{ rad/s}$ dans la partie linéaire.

J’ai participé à l’élaboration d’une nouvelle sonde de conductivité, fabriquée au sein du laboratoire. Celle-ci permet de connaître en temps réel la densité du fluide en dix points répartis régulièrement le long d’une verticale. Elle consiste en un empilement de dix cellules de 5 mm^3 dont deux faces sont recouvertes d’une pellicule d’or. La mesure de la conductance de la cellule nous renseigne sur la densité du fluide, après un étalonnage préalable. La précision de l’outil est moins bonne que celle de la sonde de conductivité précédente, notamment à cause de l’absence de sondes de température (dont l’ajout est prévu ultérieurement). Mais le suivi de la densité du fluide en plusieurs points répartis régulièrement selon la verticale permet d’observer les ondes émises autrement que par le champ de vitesse. L’accès au champ de densité et au champ de vitesse simultanément, au passage des ondes, permet une compréhension complète de l’écoulement du fluide.

4 Techniques de visualisation

Si la physique des ondes internes est connue depuis longtemps, un grand problème des dernières décennies a été la visualisation des ondes. Les techniques informatiques développées lors des années 2000 ont permis de grandes avancées dans ce domaine.

4.1 Schlieren synthétique dans le cas des fluides stratifiés

Cette technique est une technique optique. Le sel est un agent stratifiant en densité, qui fait changer l’indice optique du fluide avec la salinité. Ainsi un fluide stratifié en salinité est également « stratifié » en indice optique. Lorsque les expériences sont quasi bi-dimensionnelles, c’est-à-dire que la propagation des ondes internes est invariante selon une direction horizontale, on peut visualiser les ondes à travers la trace qu’elles laissent sur l’indice optique du milieu [65]. En effet, le déplacement de particules de fluide de densités différentes induit un changement du gradient de densité qui est relié au gradient d’indice. Ce changement local d’indice au cours du temps fait varier la position apparente d’une grille de points située à l’arrière de la cuve par rapport à une image de référence. La comparaison des images obtenues au cours du temps avec l’image de référence permet d’accéder aux variations du gradient de densité mais non aux vitesses directement. Une fois que l’on obtient une série d’images, un algorithme de calcul détermine l’ensemble des déplacements verticaux et horizontaux vus par la caméra.

4.2 Vélométrie par imagerie de particules

La technique de vélocimétrie par imagerie de particules ou *Particle Image Velocimetry* en anglais, que l’on nommera par la suite sous son abréviation usuelle PIV, est d’un principe assez simple, même si son utilisation en fluide stratifié nécessite quelques ajustements. De fines particules sont introduites dans le fluide de façon à avoir une répartition homogène en volume. Une nappe laser éclaire alors ces dernières et la position des particules est enregistrée par une caméra. Entre chaque image, le déplacement des particules est mesuré pour remonter au champ de vitesse du fluide.

Plusieurs types de particules peuvent être utilisés suivant la stratification du fluide et la taille du champ observé. Lorsque le champ observé est de l’ordre de

4. TECHNIQUES DE VISUALISATION

plusieurs dizaines de cm, des particules de verre de $8\text{ }\mu\text{m}$ d'épaisseur sont introduites dans le fluide et sédimentent très lentement. Leur densité étant voisine de 1.1 g.cm^{-3} et leur taille faible, leur vitesse de sédimentation avoisine le centième de mm/s alors que la vitesse typique des ondes observées ou des écoulements ayant lieu au sein du fluide sont de l'ordre du mm/s. Cependant, alors que pour les fluides en rotation, on peut se permettre de brasser le fluide entre chaque expérience pour obtenir une densité homogène de particules, cela est interdit pour les fluides stratifiés. Si des expériences ont lieu sur plusieurs jours, il faut donc ensemençer régulièrement le fluide. Pour les expériences menées sur la plateforme Coriolis, où les champs observés sont très larges (supérieurs au m^2), ces particules sont trop petites pour pouvoir être utilisées et il faut donc prendre des particules plus grosses. Les particules utilisées sont des particules de polystyrène qui peuvent atteindre 1 mm de diamètre et qui sont en isodensité avec le fluide environnant. Cela permet d'éviter une sédimentation au fond de la cuve. Pour ces champs de grande taille, lors de la prise de vue de coupes horizontales, on prendra garde à la courbure de la nappe laser due à la stratification du fluide. La nappe laser est orientée de manière à minimiser ces effets de courbure. À la différence de la technique de Schlieren synthétique, on accède ici directement au champ de vitesse. À Lyon et à Grenoble sur la plateforme Coriolis, le même algorithme de calcul CIV développé par Fincham et Delerce [18] a été utilisé. À Orsay, sur la plateforme Gyroflow équipée par Lavision, leur logiciel propriétaire a été utilisé.

4.3 Lignes de colorant

Une autre méthode brièvement exploitée au LEGI a été l'utilisation de lignes de colorant horizontales, espacées de 3 cm sur la verticale. De la fluorescéine était déposée sur des fils de coton, introduits dans la cuve, qui permettaient de tracer des plans horizontaux de fluorescéine. Ces derniers étaient éclairés par une nappe laser verticale, de façon à n'observer qu'un seul plan vertical de la cuve. Cette technique a été initiée par Hopfinger *et al.* [29] de façon qualitative puis de façon quantitative par Flór *et al.* [19, 20] au début des années 2000. L'intensité $I(z)$ à travers les plans de

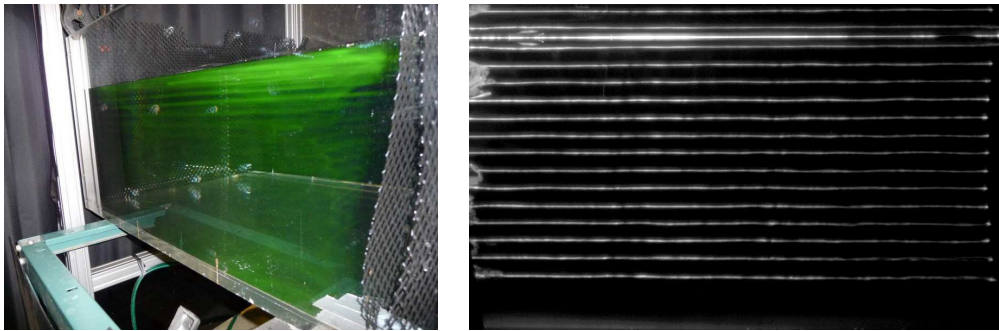


FIGURE 2.3 – À gauche, vue en perspective des plans horizontaux de fluorescéine. À droite, plan vertical éclairé par une nappe laser. La largeur de la cuve est de 1 m et les lignes de colorant sont espacées de 3 cm.

colorant le long d'une verticale varie comme une série de pics qui s'élargissent avec le temps, à cause de la diffusion de l'agent colorant. On peut supposer que chaque ligne de colorant suit une distribution gaussienne selon la verticale z , avec le centre en $z = z'(t)$ et une largeur s de la forme

$$G(z, z'(t), s) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}s} \exp \left[-\frac{(z - z'(t))^2}{2s^2} \right]. \quad (2.7)$$

La corrélation du signal expérimental avec un pic gaussien de largeur $s = s_0$ est

$$C(z'(t)) = \int I(z)G(z, z'(t), s_0)dz, \quad (2.8)$$

avec le maximum de $C(z')$ correspondant à la position du maximum de la gaussienne dans le signal.

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de suivre précisément l'emplacement des isopycnes sélectionnées, avec une résolution sous-pixel. Elle permet de voir facilement si des phénomènes de mélange ont lieu dans le fluide.

5 Génération des ondes au laboratoire

J'ai perfectionné la méthode de génération des ondes internes de gravité qui avait été initiée par Gostiaux *et al.* [26] au sein du laboratoire de physique de l'ENS Lyon et complètement caractérisée par Mercier *et al.* [48]. Le générateur d'ondes consiste en un empilement de plaques dont le mouvement est forcé par un arbre à cames. Un exemple d'une came et d'une plaque est schématisé figure 2.4 et le générateur monté avec un profil sinusoïdal est montré figure 1.1. Ces plaques oscillent selon une direc-

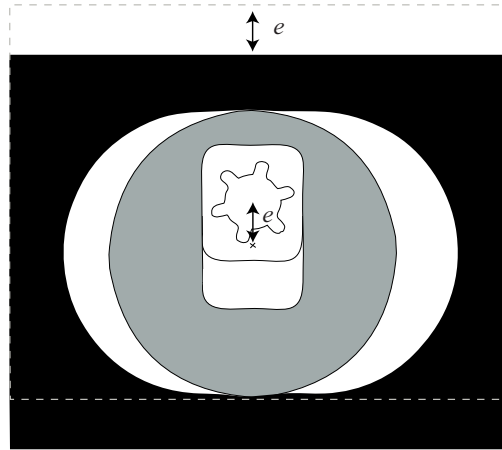


FIGURE 2.4 – Plaque et came variable de nouvelle génération dont l'excentricité e peut être ajustée de façon continue. La rotation de la came (en gris) de 90° permet à la plaque de se déplacer de la position 1 (en pointillé) à la position 2 (en noir). Le déplacement de la partie centrale s'ajustant sur les crénelures de l'arbre à cames permet de fixer de façon continue l'excentricité e désirée.

tion privilégiée et forcent une certaine condition aux limites. Un déphasage adéquat entre chaque came ainsi qu'une excentricité bien choisie permettent potentiellement de choisir un profil quelconque pour la génération d'ondes de gravité 2D. La figure 1.1 montre un profil sinusoïdal fabriqué à l'aide de ce générateur. Grâce aux modifications que j'ai apportées, on contrôle maintenant de façon continue l'amplitude de l'onde émise et on améliore la précision de la longueur d'onde pouvant être choisie.

Le générateur tel qu'il a été conçu à l'origine avait un problème récurrent : on fixait définitivement à la fabrication des comes une certaine excentricité et un certain déphasage. Comme l'épaisseur d'une came est déterminée, si l'on veut construire une onde plane dont la vitesse le long de la propagation ξ s'exprime $v = v_0 \cos(\kappa\eta - \sigma t)e^{-\beta\xi}$ (avec η , direction transverse à la propagation), on fixera une excentricité constante $e = v_0/\sigma$ pour toutes les comes et un déphasage constant entre chaque came. Par exemple, pour un arbre à comes de six crénelures, et des comes de 6.3 mm d'épaisseur, la longueur d'onde fixée par cette fabrication sera de $6 \times 6.3 \simeq 38$ mm. Deux excentricités étaient disponibles : 0.5 cm et 1 cm. On pouvait également générer un mode n vertical dans une cuve stratifiée de hauteur h dont l'amplitude de vitesse s'écrit de façon générique $v = v_0 \cos(n\pi z/h) \cos(\sigma t)$. Dans ce cas, le déphasage sera fixé comme nul entre chaque came et on fera varier l'excentricité entre chaque came suivant le profil sinusoïdal du mode n considéré. Dans les deux cas, et d'autant plus dans le dernier, tous les paramètres sont fixés à la fabrication des comes, et il faut donc fabriquer un jeu de comes différent pour chaque profil que l'on souhaite générer.

Ainsi l'utilisation d'un générateur modulable était devenue indispensable, les grandes lignes sont présentées ci-après. L'idée était donc de pouvoir moduler l'excentricité de chaque came de façon continue. La figure 2.4 montre le principe d'une telle modification. L'excentricité de chaque came peut être indépendamment fixée par rapport à chacune de ses voisines. On peut donc choisir n'importe quel profil d'amplitude pour le générateur d'ondes. Seul le déphasage entre chaque came n'est encore modifiable que par pas de $360^\circ/6 = 60^\circ$ à cause des six crénelures de l'arbre à comes. J'ai ensuite utilisé une autre astuce pour réduire ce déphasage minimum entre chaque came et ainsi pouvoir moduler plus finement la longueur d'onde d'un profil de type onde plane que l'on voudrait forcer. Pour cela, il suffit que la came ne soit pas symétrique lorsqu'on la retourne pour l'enfiler à l'envers sur l'arbre à comes. Dans notre cas, il faut décaler chaque came de la moitié du pas lié à la crénelure. En pratique, si l'on veut une longueur d'onde de 7.6 cm, on empilera alors douze comes de la façon suivante (voir figure 2.5(a)) :

- came 1 : -15°
- came 2 : $15 + 0 \times 60 = 15^\circ$
- came 3 : $-15 + 1 \times 60 = 45^\circ$
- came 4 : $15 + 1 \times 60 = 85^\circ$
- ...
- came 12 : $15 + 5 \times 60 = 315^\circ$.

Si l'on veut diviser la longueur d'onde par deux pour atteindre 3.8 cm, six comes seront empilées de la façon suivante (voir figure 2.5(b)) :

- came 1 : -15°
- came 2 : $-15 + 1 \times 60 = 45^\circ$
- came 3 : $-15 + 2 \times 60 = 105^\circ$

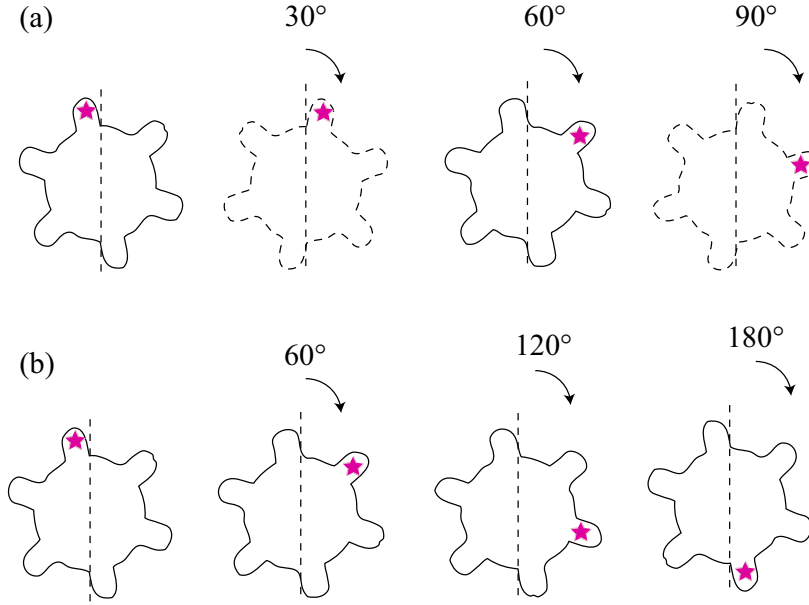


FIGURE 2.5 – Principe d’empilement des cames. (a) une came sur deux est retournée (courbe pointillée) pour obtenir un déphasage plus petit que celui imposé par l’arbre à cames. (b) déphasage standard des cames.

- ...
- came 6 : $-15 + 5 \times 60 = 285^\circ$.

On obtient alors un déphasage de 30° dans le premier cas et de 60° dans le deuxième. Il faut cependant noter que ce générateur ne permet pas d’épouser parfaitement la condition aux limites d’une onde inertielle. Il manque un déplacement des cames selon la direction transverse notée y sur la figure 1.1(b). Cependant une amélioration est déjà en cours pour corriger ce point.

On retiendra que cette technique permet d’épouser au mieux la condition aux limites d’une onde plane dans un fluide stratifié, ou tout autre profil choisi par l’expérimentateur. Cette amélioration technique se diffuse déjà dans d’autres groupes de recherche en France et à l’étranger, notamment dans le groupe de T. Peacock (MIT, Cambridge, E.U.).

6 Conclusion

Les progrès mécaniques de génération d’ondes, optiques, de visualisation et de mesures ont permis une avancée considérable pour l’analyse quantitative des ondes internes. Les outils mis en place et les améliorations proposées au cours de cette thèse autorisent une génération précise des ondes internes ou inertielles, et permettent une étude approfondie.

Chapitre 3

Instabilité paramétrique sous-harmonique d'ondes inertiellles

Ce chapitre a été publié sous la forme suivante dans *Physics of Fluids*, sous le titre « Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid » [7]. Une partie supplémentaire n'apparaissant pas dans l'article original est présentée en annexe.

Abstract

Plane inertial waves are generated using a wavemaker, made of oscillating stacked plates, in a rotating water tank. Using particle image velocimetry, we observe that, after a transient, the primary plane wave is subject to a subharmonic instability and excites two secondary plane waves. The measured frequencies and wavevectors of these secondary waves are in quantitative agreement with the predictions of the triadic resonance mechanism. The secondary wavevectors are found systematically more normal to the rotation axis than the primary wavevector : this feature illustrates the basic mechanism at the origin of the energy transfers towards slow, quasi two-dimensional, motions in rotating turbulence.

1 Introduction

Rotating and stratified fluids support the existence of two classes of anisotropic dispersive waves, called respectively inertial and internal waves, which play a major role in the dynamics of astrophysical and geophysical flows [27, 39, 56]. These waves share a number of similar properties, such as a group velocity normal to the phase velocity. Remarkably, in both cases, the frequency of the wave selects only its direction of propagation, whereas the wavelength is selected by other physical properties of the system, such as the boundary conditions or the viscosity [25, 39, 57].

Most of the previous laboratory experiments on inertial waves in rotating fluids have focused on inertial modes or wave attractors in closed containers [16, 17, 21, 40,

42, 44, 50], whereas less attention has been paid to propagative inertial wave beams. Inertial modes and attractors are generated either from a disturbance of significant size compared to the container [21], or more classically from global forcing [16, 17, 40, 42, 44, 50]. Inertial modes are also detected in the ensemble average of rotating turbulence experiments in closed containers [4, 36]. On the other hand, localized propagative inertial wave beams have been investigated recently in experiments using particle image velocimetry (PIV) [13, 49].

A monochromatic internal or inertial wave of finite amplitude may become unstable with respect to a parametric subharmonic instability [3, 45, 63, 68]. This instability originates from a nonlinear resonant interaction of three waves, and induces an energy transfer from the primary wave towards two secondary waves of lower frequencies. This instability has received considerable interest in the case of internal gravity waves [63], because it is believed to provide an efficient mechanism of dissipation in the oceans, by allowing a transfer of energy from the large to the small scales [34, 41, 52].

Parametric instability is a generic mechanism expected for any forced oscillator. A pendulum forced at twice its natural frequency provides a classical illustration of this mechanism. Here, the “parameter” is the natural frequency of the pendulum, which is modulated in time through variations of the gravity or pendulum length. Weakly nonlinear theory shows that the energy of the excitation, at frequency σ_0 , is transferred to the pendulum at its natural frequency $\sigma_0/2$, resulting in an exponential growth of the oscillation amplitude.

In the case of inertial (resp. internal) waves, the “parameter” is now the so-called Coriolis frequency $f = 2\Omega$, with Ω the rotation rate (resp. the Brunt-Väisälä frequency N). In the presence of a primary wave of frequency σ_0 , this “parameter” becomes locally modulated in time at frequency σ_0 , and is hence able to excite secondary waves of lower natural frequency. However, here a continuum of frequencies can be excited, so that the frequencies σ_1 and σ_2 of the secondary waves are not necessarily half the excitation frequency, but they nevertheless have to satisfy the resonant condition $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_0$. Interestingly, in the absence of dissipation, the standard pendulum-like resonance $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0/2$ is recovered both for inertial and internal waves, and the corresponding secondary waves have vanishing wavelengths [63]. Viscosity is responsible here for the lift of degeneracy, by selecting a maximum growth rate corresponding to finite wavelengths, with frequencies σ_1 and σ_2 splitted on both sides of $\sigma_0/2$ [33].

The parametric subharmonic instability has been investigated in detail for internal gravity waves [33, 63]. In particular, quantitative agreement with the predicted secondary frequencies and wavenumbers have been recently obtained in laboratory experiments [31]. On the other hand, this instability mechanism has received less attention in the case of pure inertial waves (i.e., in absence of stratification), probably because of the lower importance of rotation effects compared to stratification effects in most geophysical flows. It has been observed in numerical simulations of inertial modes in a periodically compressed rotating cylinder [16, 17]. To our knowledge, parametric instability in the simpler geometry of plane inertial waves has not been investigated so far, and is the subject of this paper. A fundamental motivation for this work is the key role played by triadic interactions of inertial waves in the problem

2. INERTIAL PLANE WAVE GENERATION

of the generation of slow quasi-2D flows in rotating turbulence [35, 59, 60]. The parametric subharmonic instability indeed provides a simple but nontrivial mechanism for anisotropic energy transfers from modes of arbitrary wavevectors towards lower frequency modes, of wavevector closer to the plane normal to the rotation axis (i.e., more “horizontal” by convention). Note that this nonlinear mechanism may however be in competition with a linear mechanism—the radiation of inertial waves along the rotation axis—which has also been shown to support the formation of vertical columnar structures [62]. The relative importance of these two mechanisms is governed by the Rossby number, defined as $Ro = (\tau_{nl}\Omega)^{-1}$, with Ω^{-1} the linear timescale and $\tau_{nl} = L/U$ the nonlinear timescale based on the characteristic velocity U and length scale L . In rotating turbulence with $Ro \ll 1$, the anisotropy growth should hence be dominated by the nonlinear triadic interactions, whereas for $Ro = O(1)$ both mechanisms should be at play.

In this paper, we report the first experimental observation of the destabilization of a primary plane inertial wave and the subsequent excitation of subharmonic secondary waves. To produce a plane inertial wave of sufficient spatial extent, and hence of well-defined wavevector \mathbf{k}_0 , we have made use of a wave generator already developed for internal waves in stratified fluids [26, 47, 48]. Wave beams of tunable shape and orientation can be generated with this wavemaker. We show that, after a transient, the excited plane wave undergoes a parametric subharmonic instability. This instability leads to the excitation of two secondary plane waves, with wavevectors which are systematically more “horizontal” than the primary wavevector. We show that the predictions from the resonant triadic interaction theory for inertial waves, as described by Smith and Waleffe [60], are in excellent agreement with our experimental results. In particular, the frequencies and wavenumbers of the secondary waves accurately match the expected theoretical values.

2 Inertial plane wave generation

2.1 Structure of a plane inertial wave

We first briefly recall the main properties of inertial waves in a homogeneous fluid rotating at a constant rate Ω . In the rotating frame, the restoring nature of the Coriolis force is responsible for the propagation of the inertial waves, for frequencies $\sigma \leq f$, where $f = 2\Omega$ is the Coriolis parameter. Fluid particles excited at frequency σ describe anticyclonic circles in a plane tilted at an angle $\theta = \cos^{-1}(\sigma/f)$ with respect to the horizontal, and the phase of this circular motion propagates perpendicularly to this tilted plane.

The equations of motion for a viscous fluid in a frame rotating at a rate $\Omega = f/2$ around the axis z are

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.2)$$

where $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ is the velocity field in cartesian coordinates $\mathbf{x} = (x, y, z)$. In the following, we restrict to the case of a flow invariant along the horizontal direction y . The fluid being incompressible, the motion in the vertical plane (x, z) may be

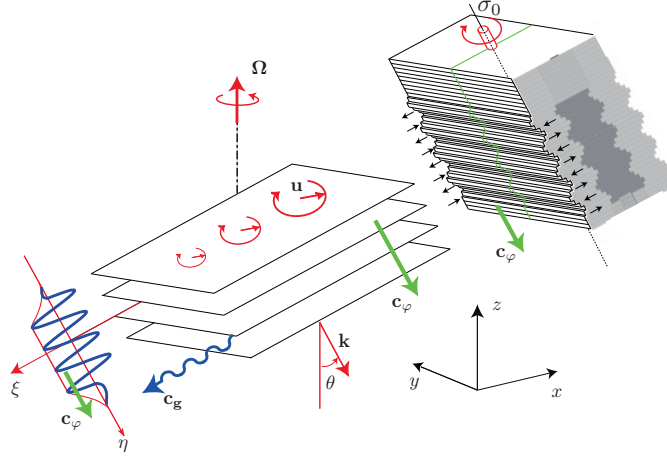


FIGURE 3.1 – Schematic representation of the wave generator. The excited plane inertial wave has a frequency σ_0 , a downward phase velocity, a negative helicity ($s_0 = -1$), and propagates at an angle $\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f)$, with $f = 2\Omega$ the Coriolis parameter.

described by a streamfunction $\psi(x, z)$, such that $\mathbf{u} = (\partial_z \psi, u_y, -\partial_x \psi)$. Neglecting viscosity, the linearized equations for small velocity disturbances are

$$\partial_t \partial_z \psi = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + f u_y, \quad (3.3)$$

$$\partial_t u_y = -f \partial_z \psi, \quad (3.4)$$

$$-\partial_t \partial_x \psi = -\frac{1}{\rho} \partial_z p. \quad (3.5)$$

These equations may be combined to obtain the equation of propagation for inertial waves,

$$\partial_{tt}(\partial_{xx} + \partial_{zz})\psi + f^2 \partial_{zz} \psi = 0. \quad (3.6)$$

Considering a plane wave solution of frequency σ and wavevector $\mathbf{k} = (k, 0, m)$,

$$\psi(x, z, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (3.7)$$

(where c.c. means complex conjugate), we obtain the anisotropic dispersion relation for inertial waves

$$\sigma = s f \frac{m}{\kappa} = s f \cos \theta, \quad (3.8)$$

with $\kappa = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $s = \pm 1$, and θ the angle between \mathbf{k} and the rotation axis (see Fig. 3.1). We see from Eq. (3.8) that a given frequency σ lower than f selects a propagation angle $\pm\theta$, without specifying the norm of the wavevector κ . The corresponding velocity field is given by

$$u_x = i m \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (3.9)$$

$$u_y = s \kappa \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (3.10)$$

$$u_z = -i k \psi_0 e^{i(kx + mz - \sigma t)} + \text{c.c.} \quad (3.11)$$

2. INERTIAL PLANE WAVE GENERATION

We recover here that the fluid particles describe anticyclonic circular motions in tilted planes perpendicular to \mathbf{k} , as sketched in Fig. 3.1. The wave travels with a phase velocity $\mathbf{c}_\varphi = \sigma \mathbf{k} / \kappa^2$ and a group velocity $\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \sigma$ normal to \mathbf{c}_φ . The vorticity $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, given by

$$\boldsymbol{\omega} = -s\kappa \mathbf{u}, \quad (3.12)$$

is associated to the shearing motion between planes of constant phase. Because the velocity and vorticity are aligned, inertial waves are also called *helical waves*, and the sign s in Eq. (3.8) identifies to the sign of the wave helicity $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$, with $s = +1$ for a right-handed wave and $s = -1$ for a left-handed wave. For instance, in the classical St. Andrew's wave pattern emitted from a point source [13], the two upper beams are right-handed and the two lower beams are left-handed, although the fluid motion is always anticyclonic.

2.2 Generation of a plane inertial wave

In order to generate a plane inertial wave, we have made use of a wavemaker, introduced by Gostiaux *et al.* [26], which was originally designed to generate internal gravity waves (see Mercier *et al.* [48] for a detailed characterization of the wavemaker). This wavemaker consists of a series of oscillating stacked plates, designed to reproduce the fluid motion in the bulk of an internal gravity wave invariant along y . The use of this internal wave generator for the generation of inertial waves is motivated by the similarity of the spatial structure of the two types of waves in the vertical plane (x, z) . However, the fluid motion in the internal wave is a simple oscillating translation in the direction of the group velocity, whereas fluid particles describe anticyclonic circular translation in the case of inertial waves. As a consequence, the oscillating plates of the wavemaker only force the longitudinal component of the circular motion of the inertial waves, whereas the lateral component is let to freely adjust according to the spatial structure of the wave solution.

The wavemaker is made of a series of 48 parallelepipedic plates stacked around a helical camshaft, with the appropriate shifts between successive comes in order to form a sinusoidal profile at the surface of the generator. We introduce the local coordinate system (ξ, y, η) , tilted at an angle θ about y , where ξ is along the wave propagation and η is parallel to the camshaft axis (see Fig. 3.1). The group velocity and the phase velocity of the wave are oriented along ξ and η respectively. As the camshaft rotates at frequency σ_0 , the plates, which are constrained in the y direction, oscillate back and forth along ξ . The sign of the rotation of the helical camshaft selects the helicity of the excited wave, and hence an upward or downward phase velocity. In the present experiment, the rotation of the camshaft is set to produce a downward phase velocity, resulting in a left-handed inertial wave of negative helicity $s_0 = -1$.

The comes are 14 cm wide in the y direction, and their eccentricities are chosen to produce a sinusoidal displacement profile, $\xi_o(\eta) = \xi_o \sin(\kappa_0 \eta)$, of wavelength $\lambda = 2\pi/\kappa_0 = 7.6$ cm and amplitude $\xi_o = 0.5$ cm at the center of the beam. The wave beam has a width 30.5 cm with a smooth decrease to 0 at the borders, and contains approximately 4 wavelengths. The generator is only forcing the ξ component of the inertial wave, and the y component is found to adjust according to the inertial wave structure after a distance of order of 2 cm.

The wavemaker is placed in a tank of 120 cm length, 80 cm width and 70 cm depth which is filled with 58 cm of water. The tank is mounted on the precision rotating platform “Gyroflow” of 2 m in diameter. The angular velocity Ω of the platform is set in the range 1.05 to 3.15 rad s⁻¹, with relative fluctuations $\Delta\Omega/\Omega$ less than 10⁻³. A cover is placed at the free surface, preventing from disturbances due to residual surface waves. The rotation of the fluid is set long before each experiment (at least 1 hour) in order to avoid transient spin-up recirculations and to achieve a clean solid body rotation.

The propagation angle θ of the inertial wave is varied by changing the rotation rate of the platform, while keeping the wavemaker frequency constant, $\sigma_0 = 1.05$ rad s⁻¹. This allows to have a fixed wave amplitude $\sigma_0 \xi_o = 0.52$ cm s⁻¹ for all angles. The Coriolis parameter has been varied in the range $f = 1.004 \sigma_0$ to $3 \sigma_0$, corresponding to angles θ from 5° to 70°. For each value of the rotation rate, the axis of the wavemaker camshaft is tilted to the corresponding angle $\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f)$, in order to keep the plate oscillation aligned with the fluid motion in the excited wave. As a consequence, the efficiency of the forcing should not depend significantly on the angle θ . For each experiment, the fluid is first reset to a solid body rotation before the wavemaker is started.

2.3 PIV measurements

Velocity fields are measured using a 2D particle image velocimetry (PIV) system [23, 51] mounted on the rotating platform. The flow is seeded by 10 μ m tracer particles, and illuminated by a vertical laser sheet, generated by a 140 mJ Nd :YAG pulsed laser. A vertical 59×59 cm² field of view is acquired by a 14 bits 2048×2048 pixels camera synchronized with the laser pulses. For each rotation rate, a set of 3200 images is recorded, at a frequency of 4 Hz, representing 24 images per wavemaker period. This frame rate is set to achieve a typical particle displacement of 5 to 10 pixels between each frame, ensuring an optimal signal-to-noise ratio for the velocity measurement. PIV computations are performed over successive images, on 32×32 pixels interrogation windows with 50% overlap. The spatial resolution is 4.6 mm, which represents 17 points per wavelength of the inertial wave.

Figure 3.2 shows typical instantaneous horizontal velocity fields after 2 and 7 periods $T = 2\pi/\sigma_0$ from the start of generator, for an experiment performed with $\sigma_0/f = 0.84$. A well defined truncated plane wave propagates downward, making an angle $\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f) \simeq 34^\circ$ to the horizontal. The front of the plane wave is propagating at a velocity 8.3 ± 0.6 mm s⁻¹, which agrees well with the expected group velocity $c_g = f \sin \theta / \kappa = 8.5$ mm s⁻¹. The phase velocity is downward, normal to the group velocity, and also agrees with the expected value $c_\phi = \sigma_0 / \kappa = 12.7$ mm s⁻¹.

Two sources of noise have been identified, which can be seen in the temporal energy spectrum of the velocity fields (Fig. 3.3, described in the next subsection) : an oscillatory motion at frequency $\sigma = \Omega = 0.5f$, due to a residual modulation of the rotation rate of the platform, and slowly drifting thermal convection structures at frequency $\sigma \rightarrow 0$, due to slight temperature inhomogeneities in the tank. Both effects contribute to a velocity noise of order of 0.2 mm s⁻¹, i.e. 25 times lower than the wave amplitude close to the wavemaker. This noise could be safely removed using a temporal Fourier filtering of the velocity fields at the forcing frequency σ_0 . This

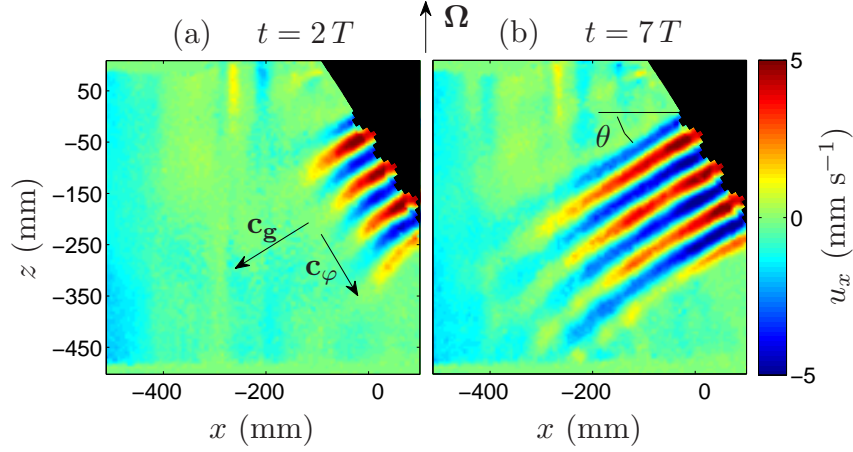


FIGURE 3.2 – Horizontal velocity field after 2 and 7 periods from the start of the wavemaker for $\sigma_0/f = 0.84$. The wavemaker is on the top-right, forcing a wave propagating along \mathbf{c}_g with a phase propagating along \mathbf{c}_φ .

filtering however fails in the particular case where $\sigma_0 = \Omega$, for which the mechanical noise of the platform cannot be filtered out of the inertial wave signal.

The wavemaker is found to successfully generate well defined plane waves for frequencies $\sigma_0 \geq 0.65f$. For lower frequency, i.e. for steeper angle of propagation [$\theta = \cos^{-1}(\sigma_0/f) > 50^\circ$], the wave pattern shows significant departure from the expected plane wave profile, which may be attributed to the interference of the incident wave with the reflected wave on the bottom of the tank.

3 Subharmonic instability

3.1 Experimental observations

After a few excitation periods, the front of the inertial wave has travelled outside the region of interest, and the inertial wave can be considered locally in a stationary regime. However, after typically 15 wavemaker periods (the exact value depends on the ratio σ_0/f), the inertial wave becomes unstable and show slow disturbances of scale slightly smaller than the excited wavelength.

We have characterized this instability using Fourier analysis of the PIV time series. We compute, at each location (x, z) of the PIV field, the temporal Fourier transform of the two velocity components over a temporal window Δt ,

$$\hat{\mathbf{u}}_\sigma(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathbf{u}(x, z, t) e^{i\sigma t} dt. \quad (3.13)$$

The temporal energy spectrum is then defined as

$$E(\sigma) = \langle |\hat{\mathbf{u}}_\sigma|^2 \rangle_{x,z}, \quad (3.14)$$

where $\langle \cdot \rangle_{x,z}$ is the spatial average over the PIV field.

If we compute $E(\sigma)$ over a temporal window Δt spanning a few excitation periods, we observe, as t_0 is increased, the emergence of two broad peaks at frequencies smaller

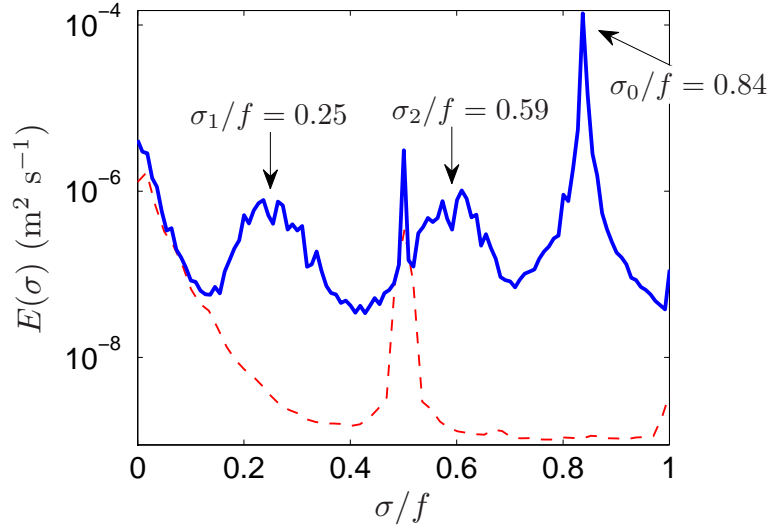


FIGURE 3.3 – Temporal energy spectra for two experiments performed at rotation rate $\Omega = 0.63 \text{ rad s}^{-1}$ with (continuous line) and without (dashed line) the wavemaker operating at $\sigma_0/f = 0.84$. The spectrum with the generator working has been computed on the time interval between 24 and 116 periods after the start of the generator. The peak at $\sigma/f = 0.5$ present in the two spectra is the trace of the mechanical noise of the platform at the rotation frequency $\sigma = \Omega$, whereas the low frequencies are due to thermal convection effects (see text).

than the excitation frequency σ_0 , suggesting the growth of a subharmonic instability. These two subharmonic peaks can be seen in Fig. 3.3, for an experiment performed at rotation rate $\Omega = 0.63 \text{ rad s}^{-1}$ with the wavemaker operating at $\sigma_0/f = 0.84$. Here, the temporal window Δt is chosen equal to 92 wavemaker periods, yielding a spectral resolution of $\Delta\sigma = 2\pi/\Delta t \simeq 9 \times 10^{-3} f$. The two secondary peaks are centered on $\sigma_1/f = 0.25 \pm 0.03$ and $\sigma_2/f = 0.59 \pm 0.03$, and their sum matches well with the forcing frequency $\sigma_0/f = 0.84$, as expected for a subharmonic resonance. The significant width of the secondary peaks, of order $0.07 f$, indicates that this resonance is weakly selective. This broad-band selection will be further discussed in Sec. 4.2.

The subharmonic instability of the primary wave is found for all forcing frequencies σ_0 ranging from $0.65f$ to f ; the measured frequencies $\sigma_{1,2}$ are given in Tab. 3.1. The absence of clear subharmonic instability at lower forcing frequency may be due to an intrinsic stability of the primary wave for $\sigma_0 < 0.65f$, or to the low quality of the plane wave at steep angles because of the interference with the reflected wave beam on the bottom of the tank.

Using temporal Hilbert filtering [14, 47], the spatial structure of the wave amplitude $\mathbf{u}_o(\mathbf{x})$ and phase $\varphi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t$ can be extracted for each secondary wave. The procedure consists in (i) computing the Fourier transform $\hat{\mathbf{u}}_\sigma(x, z)$ of the velocity field according to Eq. (3.13), with a temporal window Δt of at least 42 excitation periods; (ii) band-pass filtering $\hat{\mathbf{u}}_\sigma(x, z)$ around the frequency of interest σ_1 or σ_2 with a bandwidth of $\delta\sigma = 2.0 \cdot 10^{-2} f$, but without including the associated

3. SUBHARMONIC INSTABILITY

σ_0/f	$(\sigma_1 + \sigma_2)/f$	σ_1/f	σ_2/f
0.64	0.64	0.19	0.45
0.71	0.71	0.21	0.50
0.84	0.84	0.25	0.59
0.91	0.94	0.27	0.67
0.95	0.97	0.29	0.68
0.98	0.98	0.32	0.66
0.99	1.00	0.34	0.66

TABLE 3.1 – Frequencies of the secondary waves σ_1/f and σ_2/f , determined from the peaks in the temporal energy spectra, as a function of the frequency of the primary wave σ_0/f . The uncertainty for σ_1/f and σ_2/f is ± 0.03 .

negative frequency; (iii) reconstructing the complex velocity field by computing the inverse Fourier transform (including a factor 2, which accounts for the redundant negative frequency, in order to conserve energy),

$$\mathbf{u}_H(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}) e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.15)$$

The physical velocity field is finally given by $Re(\mathbf{u}_H)$. The wave amplitude \mathbf{u}_o and phase field φ are finally obtained from the Hilbert-filtered field \mathbf{u}_H .

In Figs. 3.4(c) and (d), for the experiment at $\sigma_0/f = 0.84$, we show the maps of the phase of the secondary waves, extracted from Hilbert filtering at frequencies σ_1 and σ_2 respectively. It is worth to note, as can be verified from Fig. 3.3, that the corresponding typical velocity amplitude is at least ten times smaller than for the primary wave [see Fig. 3.4(a)]. The spatial structures of the phase of these secondary waves are not as clearly defined as for the primary wave [Fig. 3.4(b)]. In particular, dislocations can be distinguished in the phase field. The finite extent of the primary wave and its spatial decay due to viscous attenuation are probably responsible for this departure of the secondary waves from pure plane waves. It is also important to note that the monochromaticity of the first subharmonic wave [Fig. 3.4(c)] is affected by interferences with its reflection on the wavemaker which is due to the fact this secondary wave is propagating toward the wavemaker. However, to a reasonable degree of accuracy, the two secondary waves can be considered locally as plane waves, characterized by local wavevectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 .

3.2 Helical modes

The approximate plane wave structure of the two secondary waves suggests to analyze the instability in terms of a triadic resonance between the primary wave, of wavevector \mathbf{k}_0 , and the two secondary waves, of wavevectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 . This resonance may be conveniently analyzed in the framework of the helical decomposition, introduced by Waleffe [71, 72], which we briefly recall here.

Helical modes have been introduced as a general spectral decomposition basis, which is useful to analyze the energy transfers via triadic interactions. Although this decomposition also applies for non-rotating flows, it is particularly relevant for

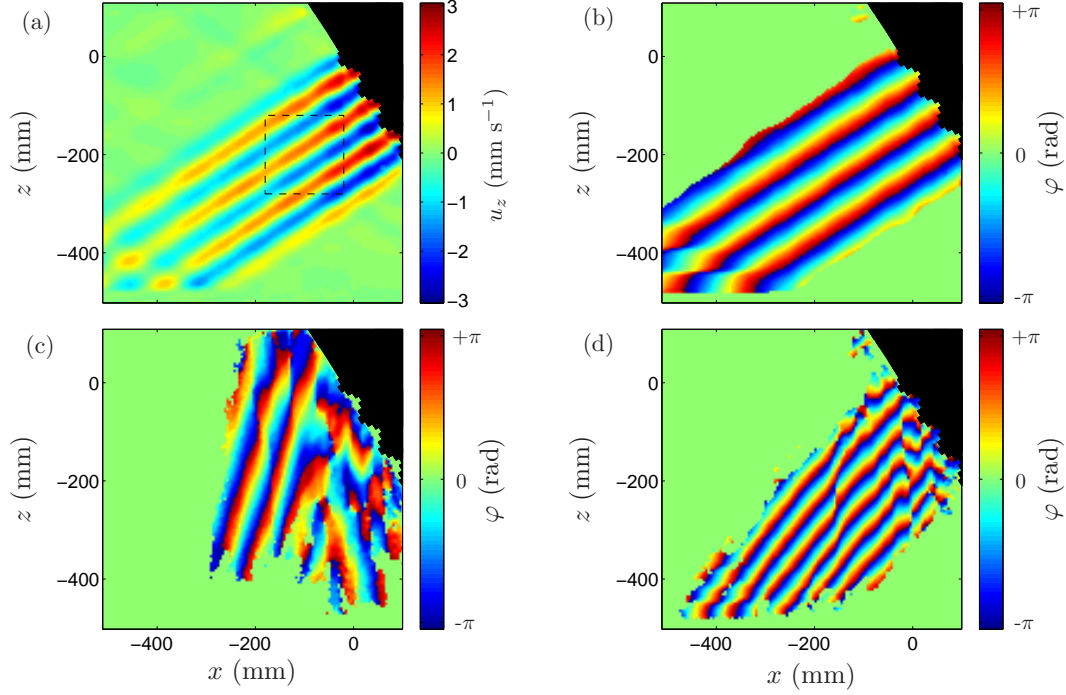


FIGURE 3.4 – Hilbert filtered vertical velocity (a) and phase (b) of the primary wave at $\sigma_0/f = 0.84$, and phase of the Hilbert filtered first [(c), $\sigma_1/f = 0.25$] and second [(d), $\sigma_2/f = 0.59$] subharmonic waves. The phase is displayed only where the wave amplitude is larger than $1.3 \cdot 10^{-1} \sigma_0 \xi_0$ for (b) and $7.7 \cdot 10^{-3} \sigma_0 \xi_0$ for (c) and (d). In (a), the square in dashed lines indicates the region where the primary wave amplitude A_0 has been measured.

rotating flows, because inertial plane waves have exactly the structure of helical modes [72]. Any velocity field can actually be decomposed as a superposition of helical modes of amplitudes $A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s_{\mathbf{k}}=\pm 1} A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t) \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma_{s_{\mathbf{k}}}^{\mathbf{k}} t)}, \quad (3.16)$$

where $\sigma_{s_{\mathbf{k}}}^{\mathbf{k}}$ is the frequency associated to a plane wave of wavevector \mathbf{k} and helicity sign $s_{\mathbf{k}}$. The helical mode $\mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k})$ is normal to \mathbf{k} (by incompressibility), and given by

$$\mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \times \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|} + i s_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|}, \quad (3.17)$$

where $s_{\mathbf{k}} = \pm 1$ is the sign of the mode helicity¹. Injecting the decomposition (3.16) into the Navier-Stokes equation (3.1) yields

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \kappa^2 \right) A_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{q}}} A_{\mathbf{p}}^* A_{\mathbf{q}}^* e^{i(\sigma_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{p}} + \sigma_{\mathbf{q}})t}, \quad (3.18)$$

1. The definition of the helical mode used here corresponds to the one in Ref. [60]. In Refs. [71] and [72], the helical mode is defined as the complex conjugate of Eq. (3.17), resulting in a sign change of the helicity.

3. SUBHARMONIC INSTABILITY

with stars denoting complex conjugate, and $A_{\mathbf{k}}$, $\sigma_{\mathbf{k}}$ being short-hands for $A_{s_{\mathbf{k}}}(\mathbf{k}, t)$, $\sigma_{s_{\mathbf{k}}}$. In Eq. (3.18), the sum is to be understood over all wavevectors \mathbf{p} and \mathbf{q} such that $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ and all corresponding helicity signs $s_{\mathbf{p}}$ and $s_{\mathbf{q}}$. In the following, the equation $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ will be referred to as the spatial resonance condition for a triad of helical modes. The interaction coefficient is given by

$$C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} [s_{\mathbf{q}}\kappa_{\mathbf{q}} - s_{\mathbf{p}}\kappa_{\mathbf{p}}] \left(\mathbf{h}_{s_{\mathbf{p}}}^*(\mathbf{p}) \times \mathbf{h}_{s_{\mathbf{q}}}^*(\mathbf{q}) \right) \cdot \mathbf{h}_{s_{\mathbf{k}}}^*(\mathbf{k}). \quad (3.19)$$

3.3 Resonant triads

The helical mode decomposition (3.16) applies for any velocity field, containing an arbitrary spectrum of wavevectors. We restrict in the following the analysis to a set of three interacting inertial waves of wavevectors $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$. Equation (3.18) shows that the amplitude of the mode of wavevector \mathbf{k} is related to the two other modes \mathbf{p} and \mathbf{q} according to

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\kappa^2 \right) A_{\mathbf{k}} = C_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{p}}^* A_{\mathbf{q}}^* e^{i(\sigma_{\mathbf{k}} + \sigma_{\mathbf{p}} + \sigma_{\mathbf{q}})t} \quad (3.20)$$

where $C_{\mathbf{k}}$ is short-hand for $C_{\mathbf{k}\mathbf{p}\mathbf{q}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{q}}} = C_{\mathbf{k}\mathbf{q}\mathbf{p}}^{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{q}}s_{\mathbf{p}}}$. Cyclic permutation of \mathbf{k} , \mathbf{p} and \mathbf{q} in Eq. (3.20) gives the two other relevant interaction equations between the three waves. We further restrict the analysis to plane inertial waves invariant along y (i.e., $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_y = 0$). The three considered helical modes (3.17) therefore reduce to

$$\mathbf{h}_{s_{\mathbf{r}}}(\mathbf{r}) = \frac{m_{\mathbf{r}}\mathbf{e}_x - k_{\mathbf{r}}\mathbf{e}_z}{\kappa_{\mathbf{r}}} - i s_{\mathbf{r}}\mathbf{e}_y, \quad (3.21)$$

where \mathbf{r} stands for \mathbf{k} , \mathbf{p} or \mathbf{q} . From Eq. (3.21), the interaction coefficients (3.19) can be explicitly computed,

$$C_{\mathbf{k}} = \frac{i}{2\kappa_{\mathbf{k}}\kappa_{\mathbf{p}}\kappa_{\mathbf{q}}} [m_{\mathbf{p}}k_{\mathbf{q}} - m_{\mathbf{q}}k_{\mathbf{p}}] [\kappa_{\mathbf{q}}^2 - \kappa_{\mathbf{p}}^2 + s_{\mathbf{q}}s_{\mathbf{k}}\kappa_{\mathbf{q}}\kappa_{\mathbf{k}} - s_{\mathbf{p}}s_{\mathbf{k}}\kappa_{\mathbf{p}}\kappa_{\mathbf{k}}], \quad (3.22)$$

and similarly for the two cyclic permutations.

Since in Eq. (3.20) and in its two cyclic permutations the $A_{\mathbf{r}}(t)$ coefficients have to be understood as complex velocity amplitudes evolving slowly compared to wave periods $2\pi/\sigma_{\mathbf{r}}$, temporal resonance is needed in addition to spatial resonance for the left-hand coefficients $A_{\mathbf{r}}$ to be nonzero. Using 0, 1, 2 for reindexing the three waves \mathbf{k} , \mathbf{p} and \mathbf{q} , this leads to the triadic resonance conditions

$$\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0. \quad (3.24)$$

We consider in the following that only the primary wave A_0 , of given frequency σ_0 , wavevector $\mathbf{k}_0 = (k_0, m_0)$ and helicity sign s_0 , is present initially in the system (i.e., $A_{1,2}(0) = 0$). The two secondary waves $(s_1, \sigma_1, \mathbf{k}_1)$ and $(s_2, \sigma_2, \mathbf{k}_2)$ which could form a resonant triad with the primary wave may be determined using the resonance conditions (3.23) and (3.24). From the dispersion relation for inertial waves (3.8), the resonance conditions lead to

$$s_0 \frac{m_0}{\sqrt{k_0^2 + m_0^2}} + s_1 \frac{m_1}{\sqrt{k_1^2 + m_1^2}} - s_2 \frac{m_0 + m_1}{\sqrt{(k_0 + k_1)^2 + (m_0 + m_1)^2}} = 0. \quad (3.25)$$

For a given primary wave (s_0, k_0, m_0) , the solution of this equation for each sign combination (s_0, s_1, s_2) is a curve in the (k_1, m_1) plane (see Fig. 3.5). Without loss of generality, once we have taken $s_0 = -1$ (which corresponds to the experimental configuration), it is necessary to consider four sign combinations : $(-, -, -)$, $(-, +, -)$, $(-, -, +)$ and $(-, +, +)$. Notice that the three first combinations always admit solutions, whereas the fourth one, $(-, +, +)$, admits a solution only if $|m_0| \leq \kappa_0/2$, i.e. $\theta > 60^\circ$. The exchange of \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 keeps the $(-, -, -)$ and $(-, +, +)$ resonances unchanged, but exchanges the $(-, -, +)$ and $(-, +, -)$ resonances. Eventually, three independent sign combinations remain : $(-, -, -)$, $(-, \mp, \pm)$ and $(-, +, +)$.

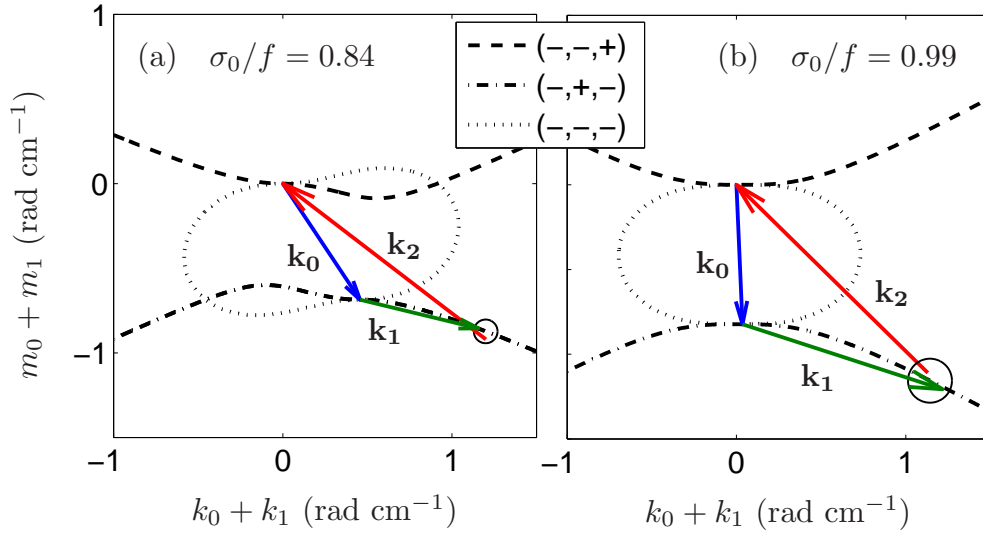


FIGURE 3.5 – Resonance curves for the primary waves (a) $[s_0 = -1, \sigma_0 = 0.84f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}]$ and (b) $[s_0 = -1, \sigma_0 = 0.99f, \kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}]$. The curves represent the location of $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 = (k_0 + k_1, m_0 + m_1)$ satisfying Eq. (3.25) for the 3 possible combinations of signs. The wavevectors measured experimentally are shown using arrows. The circle is the theoretical prediction for the location of $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1$ obtained from the maximum growth rate criterion, determined using the experimental primary wave amplitude $[A_0 = 0.29 \pm 0.07 \text{ cm s}^{-1}]$ for (a) and $A_0 = 0.34 \pm 0.11 \text{ cm s}^{-1}$ for (b)]. The diameter of the circle measures the uncertainty of the prediction due to the uncertainty on the wave amplitude A_0 .

3.4 Experimental verification of the resonance condition

The predictions of the triadic resonance theory are compared here with the measured wavevectors of the secondary waves. Figure 3.5 shows the theoretical resonance curves for two forcing frequencies, $\sigma_0/f = 0.84$ and 0.99 . For both curves, helicity sign and wavenumber of the primary wave are chosen according to the experimental values, $s_0 = -1$ and $\kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$.

For both frequencies σ_0 considered here, only the three first sign combinations admit solutions. The $(-, -, -)$ combination gives a closed loop, whereas the two others, $(-, \mp, \pm)$, give infinite branches, tending asymptotically to constant angles. The limit of large secondary wavevectors is such that $|\sigma_1| = |\sigma_2| = |\sigma_0|/2$: when

3. SUBHARMONIC INSTABILITY

a wave \mathbf{k}_0 excites two waves of wavelength $\lambda \ll 2\pi/\kappa_0$, both secondary waves have frequency $\sigma_0/2$, with opposite wavevectors, leading to a stationary wave pattern. However, such large wavenumbers are prevented by viscosity, as will be shown in Sec. 4.1.

Figure 3.5 also shows the measured secondary wavevectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 . These wavevectors are obtained from the phase fields $\varphi_{1,2}$ extracted by Hilbert filtering, using

$$\mathbf{k}_{1,2} = \nabla\varphi_{1,2}. \quad (3.26)$$

These measurements are then averaged over regions of about $(130 \text{ mm})^2$ where the secondary waves can be considered as reasonably spatially monochromatic. It must be noted that a same plane wave can be equivalently described by $(s, \sigma > 0, \mathbf{k})$ and $(s, -\sigma < 0, -\mathbf{k})$. Since we always consider primary waves with positive frequency $\sigma_0 > 0$, according to Eq. (3.24), the subharmonic frequencies $\sigma_{1,2}$ have to be taken negative. As a consequence, the Hilbert filtering should be performed for the negative peaks in the temporal Fourier transform, in order to produce phase fields with the appropriate sign. Practically, the Hilbert filtering has been performed around the positive peaks $-\sigma_{1,2}$, and the signs of the measured wavevectors have been changed accordingly.

The secondary wavevectors $\mathbf{k}_1 = (k_1, m_1)$ and $\mathbf{k}_2 = (k_2, m_2)$ measured experimentally, shown in Fig. 3.5, are in good agreement with the triadic condition (3.23), forming a triangle such that $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$. Moreover, the apex of the triangle, at $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1$, falls onto one of the three resonant curves. The selected resonant curve corresponds to the sign combination $(-, +, -)$, in agreement with the observed experimental helicities. We actually verify that $s_1 = \sigma_1\kappa_1/fm_1$ is positive ($\sigma_1 < 0$ and $m_1 < 0$) and that $s_2 = \sigma_2\kappa_2/fm_2$ is negative ($\sigma_2 < 0$ and $m_2 > 0$), confirming the $(-, +, -)$ nature of the experimental resonance.

Interestingly, the shape of the triangle $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$ in Fig. 3.5 indicates that the group velocity of the secondary wave \mathbf{k}_1 is oriented towards the wavemaker. Indeed, we recall that, for a given wavevector \mathbf{k} , the group velocity \mathbf{c}_g is normal to \mathbf{k} , and the vertical projections of \mathbf{c}_g and \mathbf{k} are oriented in the same direction if $\sigma > 0$ and in opposite directions if $\sigma < 0$. Accordingly, Fig. 3.5 shows that \mathbf{c}_{g0} and \mathbf{c}_{g2} are oriented downward, pointing from the wavemaker towards the bottom of the tank, whereas \mathbf{c}_{g1} is oriented upward, pointing towards the wavemaker. As a consequence, the secondary wave \mathbf{k}_1 is fed by the primary wave, but releases its energy back to the wavemaker.

For all the primary wave angles for which the instability is observed, the secondary waves are systematically such that $|\sigma_1|$ and $|\sigma_2|$ are lower than $|\sigma_0|$. The dispersion relation hence yields secondary wavevectors $\mathbf{k}_{1,2}$ more horizontal than \mathbf{k}_0 , as illustrated in Fig. 3.5. This property, which actually follows from the conservation of energy and helicity [60], illustrates the natural tendency of rotating flows to transfer energy towards slow quasi-two-dimensional modes. If the process is repeated, as in rotating turbulence, the energy becomes eventually concentrated on nearly horizontal wavevectors, corresponding to a quasi-2D flow, with weak dependence along the rotation axis [35, 59].

4 Selection of the most unstable resonant triad

4.1 Maximum growth rate criterion

In order to univocally predict the resonant secondary waves, a supplementary condition must be added to Eq. (3.25) : we assume that the selected resonant triad is the one with the largest growth rate. Going back to the wave interaction equations (3.20) associated to the temporal resonance condition (3.24), the amplitudes of the secondary waves are governed by

$$\frac{dA_1}{dt} = C_1 A_0^* A_2^* - \nu \kappa_1^2 A_1, \quad (3.27)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = C_2 A_0^* A_1^* - \nu \kappa_2^2 A_2, \quad (3.28)$$

with $C_{1,2}$ given by Eq. (3.22) taking $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{1,2}$ (see also Appendix A in Ref. [60]). Solving this system with initial conditions $A_{1,2}(0) = 0$, and assuming that A_0 remains almost constant at short time, lead to the solutions

$$A_{1,2}(t) = B_{1,2} (e^{\gamma_+ t} - e^{\gamma_- t}), \quad (3.29)$$

where the growth rates γ_{\pm} write

$$\gamma_{\pm} = -\frac{\nu}{2}(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{4}(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 + C_1 C_2^* |A_0|^2}. \quad (3.30)$$

In the following, we consider the primary wave amplitude as real without loss of generality, so $|A_0| = A_0$.

The coefficient γ_- is always negative, so the stability of the system is governed by the sign of γ_+ , which we simply note γ in the following. Interestingly, this growth rate γ depends on the amplitude A_0 of the primary wave. As a consequence, the primary wave is unstable with respect to a given set of secondary waves, selected by the resonance condition and unequivocally denoted by κ_1 , only if A_0 exceeds the threshold $A_c(\kappa_1) = \nu \kappa_1 \kappa_2 / \sqrt{C_1 C_2^*}$ in which case $\gamma(\kappa_1) > 0$. In other words, for a given couple of secondary waves (denoted by κ_1) to be possibly growing, the Reynolds number based on the primary wave, $Re_0 = A_0 / (\kappa_0 \nu)$, must exceed a critical value $Re_c(\kappa_1) = A_c(\kappa_1) / (\kappa_0 \nu)$ for the onset of the parametric instability. This critical Reynolds number is actually an increasing function of κ_1 and tends to zero as $\kappa_1 \rightarrow 0$, showing that whatever the value of Re_0 , there is always a continuum of resonant triads with $Re_0 > Re_c(\kappa_1)$, i.e. with a positive growth rate. The main consequence is that, whatever the value of Re_0 , the most unstable triad always has a positive (maximum) growth rate and the parametric instability does not have any Re_0 threshold to proceed.

If viscosity can be neglected, Eq. (3.30) reduces to $\gamma = \sqrt{C_1 C_2^*} A_0$. In the limit of large secondary wavenumbers $\kappa_{1,2} \gg \kappa_0$, one has $\mathbf{k}_1 \simeq -\mathbf{k}_2$, and the growth rate γ is found to tend asymptotically toward a maximum value [33], i.e., the selected secondary waves have frequency exactly half the forcing frequency. Taking viscosity into account reduces the growth rate of the large wavenumbers, and hence selects finite wavenumbers. Equation (3.30) indicates that larger wavenumbers are selected for larger primary wave amplitudes A_0 and/or lower viscosity, i.e. for larger Reynolds number Re_0 .

4.2 Selection of the most unstable wavenumbers

In Fig. 3.6, the predicted growth rates γ are plotted for the three possible sign combinations, for the primary wave defined by $s_0 = -1, \sigma_0 = 0.84f$, $\kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$. These growth rates have been computed using the primary wave amplitude averaged over the area where the secondary wavevectors have been measured (see the square in Fig. 3.4(a)), $A_0 = 0.29 \text{ cm s}^{-1}$. For the 3 types of resonance, the growth rates tend to zero when $k_1 \rightarrow -k_0/2$ and $k_1 \rightarrow \infty$ (because of viscosity). If the secondary waves \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 are exchanged, which amounts to exchanging the $(-, -, +)$ and $(-, +, -)$ resonances, the same growth rates are obtained : the curves for $(-, -, +)$ and $(-, +, -)$ are symmetrical with respect to $k_0/2$. Interestingly, the

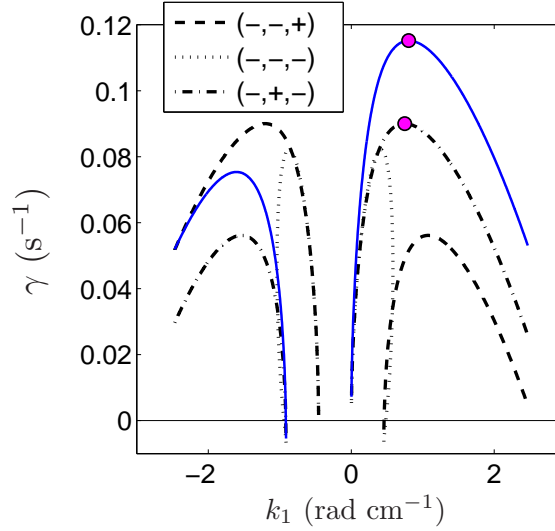


FIGURE 3.6 – Growth rates γ as a function of k_1 , computed from Eq. (3.30), for the three possible resonances for a primary wave ($s_0 = -1, \sigma_0 = 0.84f$, $\kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$). The growth rates have been computed using the average value $A_0 = 0.29 \text{ cm s}^{-1}$ for the primary wave amplitude. For resonance $(-, +, -)$, an additional curve (continuous line) has been computed using a wave amplitude 25% larger.

growth rate is positive for a broad range of wavenumbers. Together with the broad subharmonic peaks observed in the temporal spectrum of Fig. 3.3, this confirms that the parametric resonance is weakly selective in this system. Values of k_1 corresponding to significant growth rates are of the same order of magnitude as the primary wavenumber $\kappa_0 = 0.82 \text{ rad cm}^{-1}$, indicating that the viscosity has a significant effect on the selection of the excited resonant triad. For the value of σ_0/f considered in Fig. 3.6, the maximum growth rate is obtained for the $(-, +, -)$ resonance, for $k_1^{\text{max}} = 0.75 \text{ rad cm}^{-1}$. The corresponding predicted wavevector \mathbf{k}_1 is represented as a circle in the resonance curve of Fig. 3.5(a), and is found in excellent agreement with the experimental measurement of \mathbf{k}_1 (shown with an arrow).

Because of the viscous attenuation, the primary wave amplitude A_0 actually depends on the distance from the wavemaker. In the measurement area shown in Fig. 3.4(a), spatial variations of $\pm 25\%$ are found around the average $A_0 =$

0.29 cm s^{-1} . Since the growth rate (3.30) depends on A_0 , this introduces an uncertainty on the predicted value of γ , and consequently on the selected secondary wavenumbers. In order to appreciate the influence of the measured value of A_0 on the predicted triadic resonance, we also plot in Fig. 3.6 the growth rate of the selected $(-, +, -)$ resonance, but for a value of A_0 increased by an amount of 25% (continuous line), which corresponds to the wave amplitude in the close vicinity of the wavemaker. The maximum growth rate is actually found to strongly depend on A_0 , with an increase of 30%, indicating that the onset of the parametric instability will take place first close to the wavemaker. This strong sensitivity would make any direct comparison with an experimental growth rate too difficult. On the other hand, the selected wavenumber k_1^{\max} is quite robust, showing a slight increase of 6% only when A_0 is increased by 25%. As a consequence, the uncertainty in the measurement of A_0 , which is unavoidable because of the viscous attenuation of the primary wave, does not affect significantly the prediction for the most unstable secondary wavevectors.

The size of the circles in Figs. 3.5(a) and (b) illustrates the uncertainty in the determination of the most unstable wavevectors due to the spatial variation of A_0 . The relative uncertainty lies in the range 5 – 15% for the range of wave frequencies considered here. In spite of this uncertainty, we can conclude that the secondary wavevectors predictions from the maximum growth rate criterion are in good agreement with the observed resonant triads.

4.3 Dependence of the secondary waves properties on the primary wave frequency

We finally characterize here the evolution of the secondary wave properties (frequencies and wavenumbers) as the frequency of the primary wave is changed. For a given primary wave amplitude A_0 , the secondary frequencies $\sigma_{1,2}$ and wavenumbers $\kappa_{1,2}$ have been systematically computed according to the maximum growth rate criterion, and are reported in Fig. 3.7 as a function of $\sigma_0/f \in [0, 1]$. The dotted lines correspond to the $(-, -, -)$ and $(-, +, -)$ resonances, whereas the dashed thick lines are computed from the absolute maximum growth rate among all the possible resonances. For $\sigma_0/f > 0.79$, the growth rate is maximum on the $(-, \pm, \mp)$ branch, whereas for $\sigma_0/f < 0.79$ it is maximum on the $(-, -, -)$ branch.

In Fig. 3.7, we also show the experimental measurements of $\sigma_{1,2}$ and $\kappa_{1,2}$ for the range of primary wave frequencies for which a subharmonic instability is observed, $0.65 < \sigma_0/f < 0.99$. The errorbars show the uncertainties computed from the measured frequencies and wavenumbers. The agreement with the predictions from the triadic resonance theory is excellent for the $(-, +, -)$ branch. However, it is not clear why all the measurements actually follow the $(-, +, -)$ branch, although the $(-, -, -)$ branch is expected to be more unstable for the two data points at $\sigma_0/f < 0.79$.

The limited spatial extent of the primary wave along its transverse direction (which represents 4 wavelengths only) and its amplitude decay along its propagation direction (because of viscous attenuation) may be responsible for this unexpected stability of the $(-, -, -)$ branch at low σ_0/f . Indeed, the $(-, -, -)$ branch is associated to wavelengths significantly larger than the primary wavelength, so that a large spatial region of nearly homogeneous primary wave amplitude is required to sustain

5. DISCUSSION AND CONCLUSION

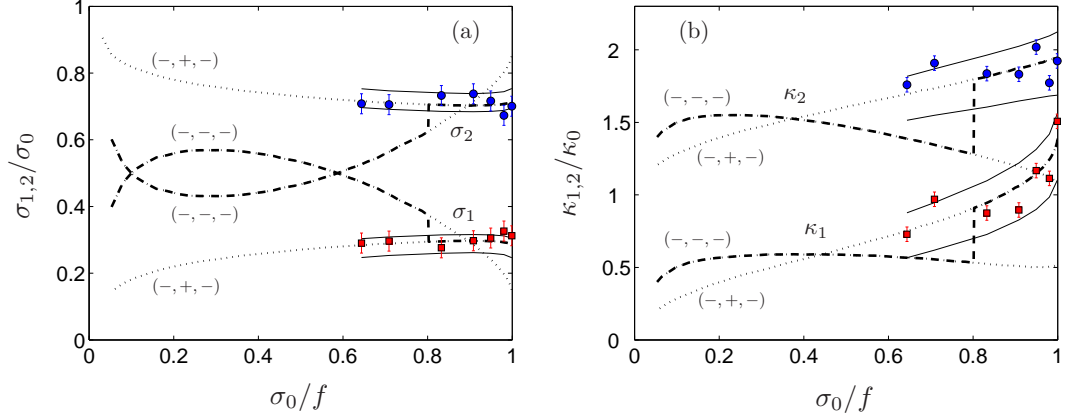


FIGURE 3.7 – Normalized frequencies $\sigma_{1,2}/\sigma_0$ (a), and wavenumbers $\kappa_{1,2}/\kappa_0$ (b) of the secondary waves, as a function of the primary wave frequency σ_0/f . Filled circles and squares with errorbars correspond to experimental measurements. Predictions from the triadic resonance instability are represented with dashed thick lines (using absolute maximum growth rate criterion) and dotted lines (using maximum growth rate criterion for the $(-, -, -)$ and $(-, +, -)$ resonances). Predictions for the most unstable resonance are $(-, -, -)$ for $\sigma_0/f < 0.79$, and $(-, +, -)$ for $\sigma_0/f > 0.79$. These predictions have been computed with a typical amplitude $A_0 = 0.30 \text{ cm s}^{-1}$ for the primary wave. Continuous solid lines show the allowed range around the $(-, +, -)$ curves, determined by considering an uncertainty of $\pm 50\%$ on A_0 .

such large wavelength secondary waves. On the other hand, the $(-, +, -)$ resonance generates lower wavelengths, which can more easily fit into the limited extent of the primary wave. Finite size effects may therefore explain both the preferred $(-, +, -)$ resonance at $\sigma_0/f < 0.79$, and the unexpected global stability of the primary wave for $\sigma_0/f < 0.65$. Confinement effects are not described by the present triadic resonance theory, which assumes plane waves of infinite spatial extent. Apart from this open issue, we can conclude that, at least for sufficiently large forcing frequency, the observed secondary frequencies and wavenumbers are in good quantitative agreement with the predictions from the triadic resonance theory.

5 Discussion and conclusion

Using a wavemaker initially designed to generate beams of *internal* gravity waves in stratified fluids, we have successfully generated well-defined plane *inertial* waves in a rotating water tank. Spectral analysis, performed on particle image velocimetry measurements of this plane inertial wave, has revealed the onset of a parametric instability, leading to the emergence of two secondary subharmonic waves. The wavevectors and frequencies of the primary and secondary waves are found in good agreement with the spatial and temporal resonance conditions for a resonant triad of inertial waves. Moreover, using the triadic resonance theory for inertial waves derived by Smith and Waleffe [60], the growth rate of the instability has been computed, yielding predictions for the secondary wavevectors and frequencies in agreement with

the measurements. At low forcing frequency, we observe a departure from these predictions which may be associated to the finite size of the primary wave. These finite size effects cannot actually be described within the triadic resonant theory, which relies on plane waves of infinite extent.

Triadic resonant instability for inertial and internal waves share a number of common properties. In particular, equations governing the wave amplitudes equivalent to Eqs. (3.27) and (3.28) may also be derived for a triad of internal waves, but in this case, they concern the amplitude of streamfunctions and not of velocities [33]. The interaction coefficients for internal waves \tilde{C}_r (with $r = 0, 1, 2$) can be readily obtained from the interaction coefficients for inertial waves C_r through a simple exchange of the vertical and horizontal components of the wavevectors, and introducing a prefactor :

$$\tilde{C}_r(k, m) = \frac{\kappa_p \kappa_q}{\kappa_r} C_r(m, k). \quad (3.31)$$

The $\kappa_p \kappa_q / \kappa_r$ prefactor between the two types of coefficients comes from the fact the wave amplitude is directly given by the velocity \mathbf{u} in the case of inertial waves, whereas it is given by the streamfunction $\tilde{\psi} \sim u / \kappa$ in the case of internal waves. The exchange of the vertical and horizontal components of the wavevectors comes from the comparison between the dispersion relations for inertial and internal waves, $\sigma / f = sm / \kappa$ and $\sigma / N = sk / \kappa$ respectively, with $f = 2\Omega$ the Coriolis parameter and N the Brunt–Väisälä frequency. The inviscid growth rate of the parametric instability $\tilde{\gamma}$ for the internal waves is actually equal to the one of inertial waves γ through

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \tilde{A}_0} = \sqrt{C_1 C_2 \kappa_0 \tilde{A}_0} = \gamma, \quad (3.32)$$

where \tilde{A}_0 is the primary internal wave amplitude (homogeneous to a streamfunction). Here, the inertial wave amplitude A_0 (homogeneous to a velocity) identifies with $\kappa_0 \tilde{A}_0$. This equality between inertial and internal growth rates finally shows that the predicted secondary waves should be identical for the two types of waves.

Interacting inertial waves are of primary importance for the dynamics of rotating turbulence. In the limit of low Rossby numbers $Ro = U / \Omega L$, where U and L are characteristic velocity and length scales, rotating turbulence can be described as a superposition of weakly interacting inertial waves, whose interactions are directly governed by triadic resonances. This is precisely the framework of wave turbulence as analyzed in Refs. [22] and [10] in the context of rotating turbulence. The parametric instability between three inertial waves can be seen as an elementary process by which energy is transferred between wavevectors in rotating turbulence. This anisotropic energy transfer takes place both in scales (or wavenumbers) and directions (or angles). The *angular* energy transfer is always directed towards more horizontal wavevectors, providing a clear mechanism by which slow quasi-2D motions become excited [60]. However, the nature of energy transfers through triadic resonance in terms of *wavenumbers* (or *scales*) —i.e., whether the energy proceeds from large to small scales or inversely— is found to depend on wave amplitude and viscosity. Indeed, it can be shown theoretically, within the present triadic resonance framework, that waves of amplitude large compared to $\nu \kappa_0$ are unstable with respect to secondary waves of large wavenumbers, producing a direct energy cascade towards small scales. On the other hand, waves of amplitude much lower than $\nu \kappa_0$ are found to

5. DISCUSSION AND CONCLUSION

excite secondary waves of smaller wavenumber, hence producing an inverse energy cascade towards larger scales. The net result of this competition is delicate to decide, and may contain an answer to the debated issue concerning the direction of the energy cascade in rapidly rotating turbulence.

Acknowledgments

We thank M. Moulin for the technical work and improvement made on the wavemaker, and C. Borget for experimental help with the rotating platform. The collaboration between FAST laboratory and ENS Lyon Physics laboratory is funded by the ANR grant no. ANR-2011-BS04-006-01 “ONLITUR”. The rotating platform “Gyroflow” was funded by the ANR grant no. 06-BLAN-0363-01 “HiSpeedPIV” and by the “Triangle de la Physique”. ENS Lyon’s research work has been also partially supported by the ANR grant no. ANR-08-BLAN-0113-01 “PIWO”.

6 Annexe : génération d'ondes planes inertielles, problèmes et solutions

Dans cette partie, on aborde un point qui a été peu évoqué dans la partie précédente : la bonne ou mauvaise qualité de la génération de l'onde inertielle à l'aide du générateur d'ondes. Les expériences précédentes ont toutes été menées pour une amplitude de came de 0.5 cm et une longueur d'onde de 7.6 cm. Cependant, lorsque l'excentricité des comes dépasse 0.5 cm, l'amplitude du faisceau chute drastiquement (voir figures 3.8(b) et (d)). On rappelle ici que la condition aux limites près du

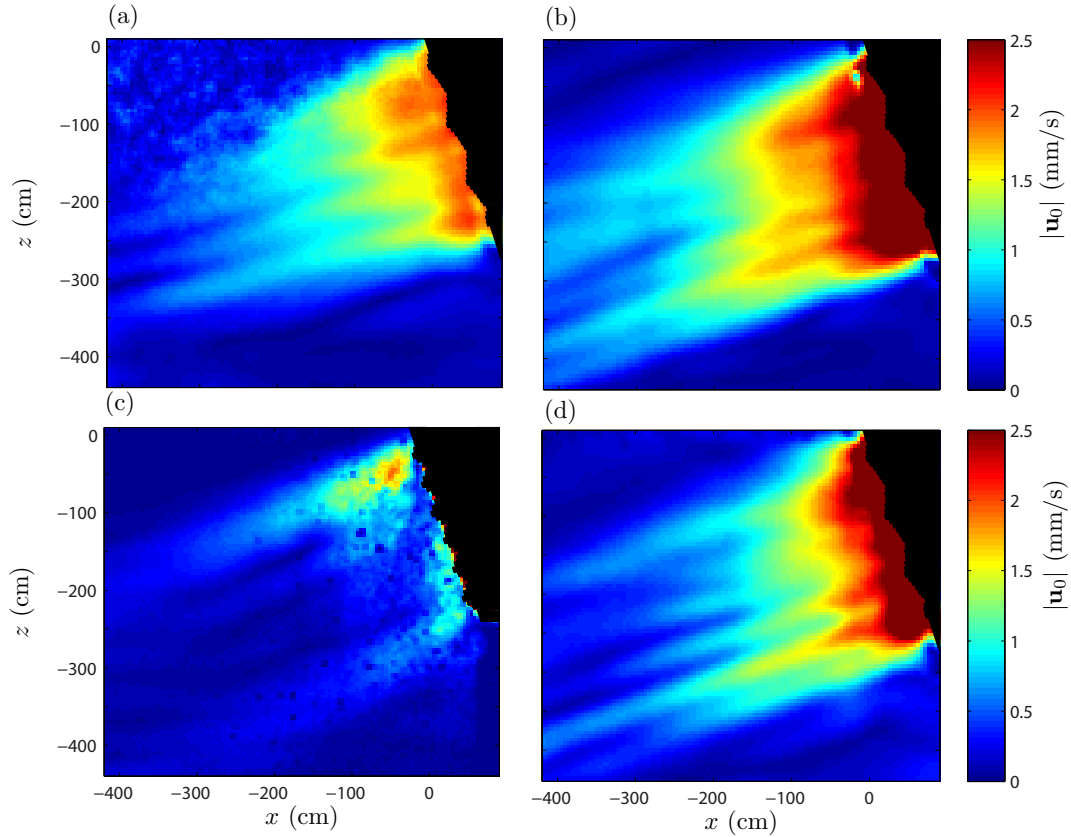


FIGURE 3.8 – Amplitude de l'onde émise obtenue par la transformée de Hilbert pour l'onde primaire à $\sigma_0/f = 0.94$ par le générateur. L'excentricité des comes est 0.25 cm pour la figure (a), 0.50 cm pour les figures (b) et (c), et 0.75 cm pour la figure (d). La longueur d'onde imposée est 7.6 cm pour les figures (a), (b) et (d) et 3.8 cm pour la figure (c).

générateur n'est pas celle des ondes inertielles. En effet, les plaques mobiles forcent uniquement la composante selon x des ondes mais pas la composante transverse selon y . On peut imaginer que la condition aux limites n'étant pas vérifiée par le générateur, une amplitude de forçage trop élevée perturbe l'ajustement de l'écoulement selon la direction transverse y , induisant un mauvais transfert d'énergie. La figure 3.8 montre la différence de l'amplitude de l'onde pour différentes longueurs d'onde et amplitudes

6. ANNEXE : GÉNÉRATION D'ONDES PLANES INERTIELLES, PROBLÈMES ET SOLUTIONS

de forçage. On peut montrer qu'à amplitude égale, si la longueur d'onde imposée par le générateur est trop faible, le générateur n'émet aucune onde de type onde plane (voir la comparaison des figures 3.8(b) et (c) où la longueur a été divisée par deux entre les deux expériences). De même, à longueur d'onde imposée égale, le générateur voit la qualité du faisceau émis chuter drastiquement si l'amplitude de l'onde est trop élevée.

On peut s'intéresser également à la décroissance de l'amplitude de l'onde due à la viscosité au cours de la propagation. On rappelle (voir chapitre 1) que l'amplitude d'une onde plane décroît le long de la propagation en $\exp(+\beta\xi)$ avec ξ coordonnée le long de la vitesse de groupe et $\beta = \nu\kappa^3/(\sigma|\tan\theta|)$. Comme le faisceau se propage dans le sens des ξ négatifs, la loi de décroissance possède un signe « + ». Dans le cas de la figure 3.8, l'angle est fixé à 20° . On devrait avoir un coefficient d'atténuation théorique $\beta_{th} = 1.47 \text{ m}^{-1}$.

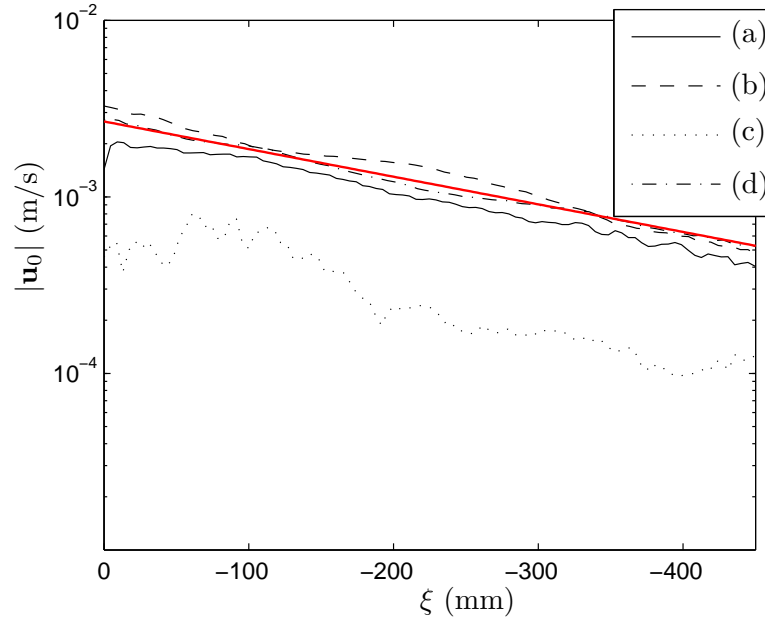


FIGURE 3.9 – Décroissance de l'amplitude de l'onde plane émise par le générateur le long de la direction de propagation ξ , au centre du faisceau, pour les expériences (a), (b), (c) et (d) de la figure 3.8. La ligne pleine en rouge représente un ajustement exponentiel de paramètre $\beta_{obs} = 3.6 \text{ m}^{-1}$ discuté dans le texte.

Les courbes (a), (b) et (d) de la figure 3.9 montrent un bon accord avec une loi exponentielle, corroborant le fait qu'on a bien forcé une onde plane, mais pour un coefficient observé $\beta_{obs} = 3.6 \text{ m}^{-1}$, soit plus de deux fois le coefficient d'atténuation prévu. On peut cependant noter que le faisceau s'étale dans la direction transverse au cours de la propagation. Cela permettrait d'expliquer en partie cette décroissance plus rapide qu'escomptée. Le faisceau est libre de diffuser dans la direction y . On peut donc poser une loi de décroissance en $1/\xi^2$ de l'énergie dans la direction de propagation. Cependant la taille finie du générateur suggère que l'on aura plutôt une diffusion de l'onde après une taille caractéristique $\alpha \sim 10 \text{ cm}$, correspondant

à la largeur des plaques mobiles. La loi de décroissance peut donc être affinée en $1/(\alpha + \xi)^2$ pour l'énergie et donc en $1/(\alpha + \xi)$ pour l'amplitude, décroissance qui se superpose à la dissipation visqueuse naturelle des ondes. Or pour des distances de propagation courtes, on peut écrire que $1/(\alpha + \xi) \approx (1/\alpha) \exp(\xi/\alpha)$. On a donc une décroissance effective de l'amplitude de l'onde en

$$A(\xi) = A_0 \exp \left(\left(\beta + \frac{1}{\alpha} \right) \xi \right) \quad (3.33)$$

avec β le coefficient théorique attendu pour une onde plane non confinée dans une direction transverse et $\beta + 1/\alpha$, le coefficient d'atténuation corrigé attendu dans notre cas. On trouve pour l'expérience proposée ici $\alpha = 6.7$ cm, valeur tout à fait plausible au vu de la géométrie proposée.

7 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons montré que nous étions capable de générer de façon contrôlée des ondes inertielles à l'aide d'un générateur d'ondes déjà utilisé pour des ondes internes de gravité. Grâce à cela, nous avons mis en évidence de façon quantitative l'instabilité paramétrique sous-harmonique, ce qui nous a permis d'établir dans une certaine mesure quelques conséquences fortes pour la turbulence en rotation.

Chapitre 4

Écoulement moyen induit par des ondes internes de gravité

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'apparition expérimentale d'un fort écoulement moyen induit par des ondes internes de gravité. Un faisceau d'ondes planes est émis à l'extrémité d'une cuve remplie d'un fluide stratifié linéairement, initialement au repos. Après une période transitoire, un jet de forte amplitude apparaît dans le faisceau d'ondes accompagné de recirculations dans le plan horizontal à l'extérieur du faisceau. Nous proposons un mécanisme physique simple, qui prédit la croissance de l'écoulement moyen et sa structure spatiale initiale, et qui s'accorde bien avec les résultats expérimentaux.

Ce chapitre contient une première version de l'article accepté pour publication par *Physics of Fluids* sous le titre « Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves » [8]. La discussion est menée ici avec des arguments phénoménologiques. Dans la version de l'article publié, un développement en échelles multiples améliore les résultats quantitatifs montrés dans la suite, sans modifier la conclusion générale. Une partie supplémentaire concernant la rétroaction de l'écoulement moyen est discutée à la fin du chapitre en section 5.

1 Introduction

De nombreuses expériences menées précédemment en laboratoire se sont principalement attachées à l'étude de la propagation de faisceaux d'ondes [26, 43, 48] ou de modes verticaux [31, 55] dans une cuve de faible largeur, égale à celle de la largeur de l'onde émise. Ici, nous considérons le cas d'un faisceau étroit se propageant dans une cuve de plus grande largeur. Ce cas a été peu étudié à ce jour malgré son importance physique.

Un point central dans la dynamique des ondes est la possibilité de génération d'un écoulement moyen due à des non-linéarités mettant en jeu un ou plusieurs faisceaux d'ondes. Ces phénomènes sont d'une importance capitale pour la modélisation des écoulements géophysiques puisqu'ils impliquent une cascade d'énergie inverse, ou des phénomènes de transport à grande échelle induits par des écoulements à petite échelle

(voir par exemple Ref. [70]). Parmi tous les phénomènes ondulatoires, les ondes internes sont très particulières du fait de la nature spécifique et inhabituelle des non-linéarités. Par exemple, il a été montré que dans certains cas [15,66], le principal terme non-linéaire disparaît soudainement si on met en jeu un unique faisceau d'ondes.

King, Zhang et Swinney [32] ont récemment montré la génération d'un écoulement moyen dû aux non-linéarités spécifiques des ondes internes. Cependant, la structure de l'écoulement moyen observé n'a pas été étudiée et aucun mécanisme sous-jacent pouvant décrire cette génération n'a été proposé. Dans ce chapitre, nous présentons un mécanisme physique pouvant donner lieu à un tel phénomène et nous apportons également des arguments expérimentaux. De nombreuses études théoriques se sont intéressées aux interactions d'ondes avec un écoulement moyen (voir par exemple Refs. [9,38,66]), mais aucune d'entre elles n'a considéré le cas d'une onde propagative dont l'amplitude varie lentement dans les trois dimensions de l'espace. Nous allons montrer que dans les expériences proposées, la variation transverse de l'amplitude de l'onde et l'atténuation visqueuse au cours de la propagation jouent un rôle clé dans la génération de l'écoulement moyen observé.

Ce chapitre est organisé comme suit. Nous présentons d'abord le système expérimental puis nous donnons des observations détaillées du champ d'onde et de l'écoulement moyen observé. Enfin, nous proposons un mécanisme pour déduire la structure spatiale de l'écoulement moyen et l'évolution temporelle de son amplitude, à partir des mesures effectuées sur le champ d'onde. Nous discutons dans une dernière partie la rétroaction de l'écoulement moyen sur le champ d'onde.

2 Système expérimental

Nous considérons une cuve de 120 cm de long, 80 cm de large et 42.5 cm de hauteur remplie de 35 cm d'eau salée (voir figure 4.1(a)). Le fluide est stratifié linéairement en densité avec une pulsation de Brunt-Väisälä $N = \sqrt{-(g/\rho)\partial_z\rho}$. Le générateur d'ondes [26,48] décrit au chapitre 2 est placé sur un côté de la cuve. Nous utilisons ici dix-huit plaques de 14 cm de largeur (selon la dimension y), empilées autour de l'arbre à cames, qui oscillent horizontalement le long de la coordonnée x . Le décalage de phase est donc fixé entre chaque came de façon à créer un profil sinusoïdal à la surface du générateur. La rotation de l'arbre à cames à la pulsation $\sigma \leq N$ génère une condition aux limites qui bouge avec une vitesse de phase dont la caractéristique ascendante ou descendante dépend du sens de rotation de l'arbre. Le déplacement de chaque plaque est $X_0(t, z) = x_0 \sin(\sigma t - mz)$, avec une longueur d'onde verticale $\lambda_z = 2\pi/m = 3.8$ cm et une amplitude $x_0 = 0.5$ cm ou $x_0 = 1$ cm.

Dans les expériences, la face avant du générateur est située à $x = 0$, centrée sur $y = 0$, $z = 15.8$ cm. Le faisceau d'ondes a une largeur de 14 cm, une hauteur de 11.4 cm, correspondant à trois longueurs d'onde. Le générateur force uniquement la composante selon x de l'onde interne générée, et la composante selon z s'ajuste selon la structure de l'onde. Nous faisons varier l'angle θ de propagation de l'onde en changeant la vitesse de rotation du moteur du générateur. La pulsation de Brunt-Väisälä reste constante pour chaque expérience et vaut $N = 0.85$ rad s⁻¹. Ainsi, la mise en place expérimentale donne lieu à une amplitude de l'onde qui dépend de la fréquence [48]. De plus, comme l'axe de l'arbre à cames reste vertical, l'efficacité

3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

du forçage dépend de façon significative de la projection du mouvement des plaques selon la direction de propagation de l'onde. La pulsation varie entre $\sigma = 0.26 N$ et $0.50 N$, ce qui correspond à des angles de propagation θ qui varient entre 15° et 30° , et l'amplitude de l'onde est mesurée expérimentalement.

Les champs de vitesse sont obtenus en utilisant un système de PIV, sous licence GNU, basé sur les algorithmes de Fincham et Delerce [18,61]. Le fluide estensemencé avec des particules de $10 \mu\text{m}$ qui sont illuminées par une nappe laser verticale ou horizontale grâce à un laser continu de 2W. Une vue verticale de $35 \times 43 \text{ cm}^2$ ou horizontale de $33 \times 43 \text{ cm}^2$ est enregistrée par une caméra 8-bit, 1024×1024 pixels. Pour chaque expérience correspondant à une pulsation différente du générateur, une série de 600 à 1600 images est enregistrée à une fréquence variant entre 0.38 et 1.25 Hz, ajustée de façon à obtenir 10 images par période. Les calculs de PIV sont effectués pour chaque paire d'images sur une fenêtre d'interrogation de 21×21 pixels avec un chevauchement de 50%. La résolution spatiale est à peu près $25 \times 25 \text{ px/cm}^2$. Une photo instantanée des particules montrant l'écoulement du fluide est présentée dans la figure 4.1(b).

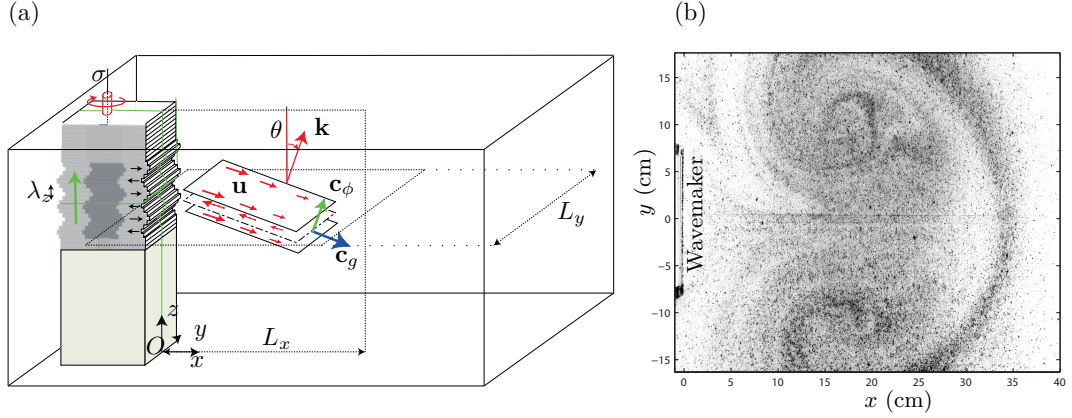


FIGURE 4.1 – (a) Représentation schématique du système expérimental. Le générateur d'ondes est placé sur un côté de la cuve, définissant l'origine des coordonnées spatiales. L'onde est émise à une fréquence σ , avec une phase montant selon la verticale, et se propage avec un angle $\theta = \sin^{-1}(\sigma/N)$. (b) Vue de dessus du fluide ensemencé de particules dans un plan horizontal $z = 21.6 \text{ cm}$.

3 Résultats expérimentaux

Nous notons $\mathbf{u} = (u, v, w) = \mathbf{u}' + \mathbf{u}_0$ le champ de vitesse dans les coordonnées cartésiennes $\mathbf{x} = (x, y, z)$, avec \mathbf{u}' la partie « onde » oscillant à la pulsation σ fixée par le générateur et \mathbf{u}_0 la partie « moyenne » de l'écoulement, qui sera nommée « écoulement moyen » dans ce qui suit (voir figure 4.1(b)).

Un filtrage de Fourier temporel sélectif sur les champs de vitesse horizontaux mesurés permet de séparer la structure spatiale de l'onde de celle de l'écoulement moyen. Le champ de vitesse horizontal de l'onde est obtenu en utilisant un filtre passe-bande centré sur σ , avec une largeur de bande de 0.014σ , et présenté dans

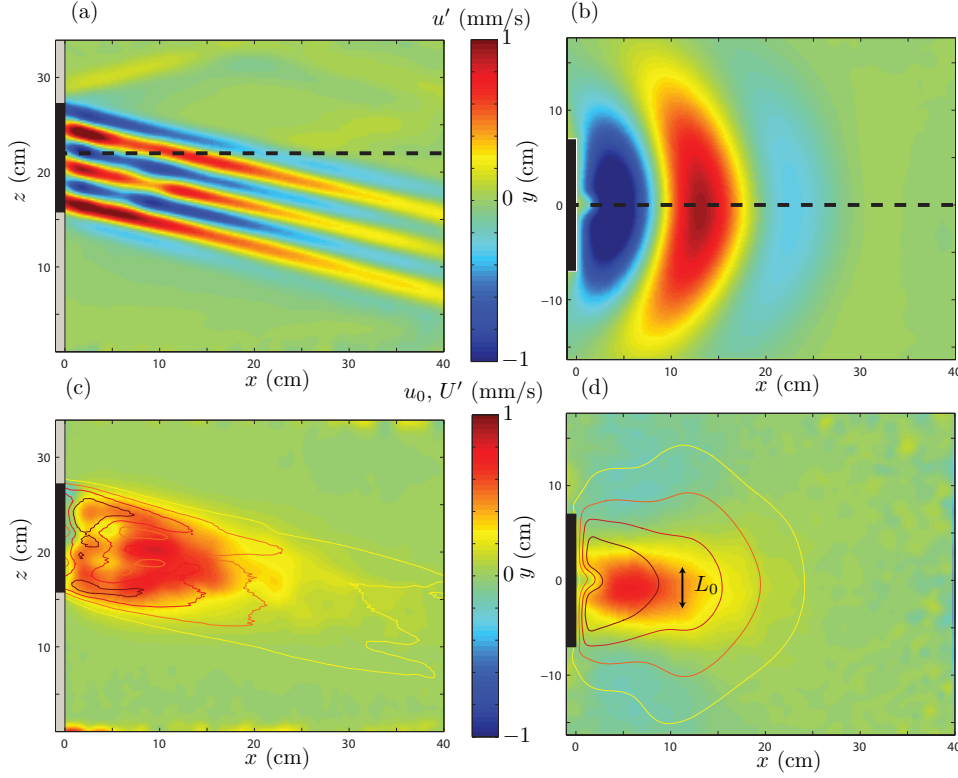


FIGURE 4.2 – Images (a) et (b) : champ de vitesse horizontale expérimental u' , filtré à la pulsation σ . Images (c) et (d) : écoulement moyen observé expérimentalement, u_0 , obtenu en appliquant un filtre passe-bas sur le champ de vitesse. Les contours représentent l'amplitude de l'onde U' . Les images de gauche (a) et (c) montrent la vue de côté et les images de droite (b) et (d) montrent la vue de dessus. Toutes les images ont été obtenues pour $\sigma/N = 0.26$ et une excentricité de 1 cm pour les cames. Le générateur est représenté en gris et les plaques mobiles en noir. La ligne pointillée en (a) (respectivement (b)) indique le champ vu en (b) (respectivement (a)).

les figures 4.2(a) et (b). La figure 4.2(a) montre une vue de côté prise au centre du générateur ($y = 0$). On peut remarquer les trois longueurs d'onde, l'atténuation de l'amplitude due à la viscosité et une amplitude à peu près constante selon la direction z . La figure 4.2(b) est une vue de dessus située à mi-hauteur des plaques mobiles du générateur. Elle montre les variations de l'amplitude de l'onde dans la direction y .

Les observations expérimentales montrées précédemment nous permettent de supposer que l'onde émise $(u', 0, w')$ est monochromatique, avec une amplitude variant dans l'espace, et peut être exprimée à l'aide de la fonction de courant

$$\psi = \Psi(x, y, z) \cos(\sigma t - kx - mz), \quad u' = -\partial_z \psi, \quad w' = \partial_x \psi, \quad (4.1)$$

puisque la composante transverse v' est faible et sera négligée dans toute la suite. Les observations expérimentales nous permettent également de dire que les variations de $\Psi(x, y, z)$ s'effectuent sur une échelle spatiale beaucoup plus grande que la longueur

4. INTERPRÉTATION

d'onde.

Nous allons maintenant considérer le champ filtré passe-bas, que nous appelons « écoulement moyen ». La largeur du filtre utilisé pour extraire l'écoulement moyen est 0.25σ . Un fort jet s'échappant du générateur est observé dans la figure 4.2(c) et (d). Cette structure est originellement localisée près du générateur, puis croît jusqu'à occuper le plan entier. Nous observons que le jet est produit exactement à l'intérieur du faisceau. Des recirculations sur les côtés de la cuve sont visibles dans la figure 4.1(b) et dans la figure 4.2(d) à travers les zones bleues. Ces recirculations montrent de façon nette que l'écoulement moyen est caractérisé par une vorticité verticale non nulle.

Nous introduisons L la longueur de la cuve et U une vitesse caractéristique de l'écoulement. L'écoulement moyen (u_0, v_0, w_0) est caractérisé par un temps lié à la structure dipolaire $T_{mean} = L/U$. À ce moment de l'étude, nous faisons une hypothèse clé : considérer que ce temps est grand devant la période de l'onde. Ce régime $T_{mean} \gg 2\pi/\sigma$ correspond à un nombre de Froude faible $F_h = U/(NL) \ll 1$ où les mouvements verticaux sont inhibés. Nous négligeons alors la vitesse verticale de l'écoulement moyen $w_0 \ll w'$, ce qui est validé par les observations expérimentales. L'écoulement moyen (u_0, v_0, w_0) est un écoulement moyen horizontal $(u_0, v_0, 0)$.

4 Interprétation

En utilisant la définition (4.1) motivée par les résultats expérimentaux, il est possible d'aller plus loin et de proposer une modélisation expliquant la génération d'un fort écoulement moyen par le faisceau d'onde. La vorticité $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ s'écrit

$$\Omega_x = \Omega_{0x} + \partial_y w' \quad (4.2)$$

$$\Omega_y = \Omega_{0y} + \partial_z u' - \partial_x w' \quad (4.3)$$

$$\Omega_z = \Omega_{0z} - \partial_y u' \quad (4.4)$$

avec $\Omega_{0x} = -\partial_z v_0$, $\Omega_{0y} = \partial_z u_0$, et $\Omega_{0z} = \partial_x v_0 - \partial_y u_0$. En utilisant l'approximation de Boussinesq [56], la dynamique de la composante verticale s'écrit

$$\partial_t \Omega_z + \mathbf{u} \cdot \nabla \Omega_z = \mathbf{\Omega} \cdot \nabla w + \nu \Delta \Omega_z . \quad (4.5)$$

Nous utilisons la relation (4.4) pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega_{0z} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} - \partial_t \partial_y u' = & \dots \\ & \mathbf{\Omega}_{0z} (\nabla w') + \mathbf{u}_0 \nabla \partial_y u' - \mathbf{u}' \cdot \nabla \Omega_{0z} - \partial_y u' \partial_z w' + \dots \\ & + (\partial_z u' - \partial_x w') \partial_y w' + \partial_y w' \partial_x w' + u' \partial_{xy} u' + w' \partial_{zy} u' + \dots \\ & + \nu \Delta \Omega_{0z} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nous utilisons alors $\partial_z w' = -\partial_x u'$ et quelques simplifications qui donnent

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega_{0z} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} - \partial_t \partial_y u' = & \dots \\ & \mathbf{\Omega}_{0z} (\nabla w') + \mathbf{u}_0 \nabla \partial_y u' - \mathbf{u}' \cdot \nabla \Omega_{0z} + \frac{1}{2} \partial_{xy} u'^2 + \partial_y (w' \partial_z u') + \nu \Delta \Omega_{0z} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

En moyennant sur une période, T_{wave} , avec l'opérateur $\bar{A} = (1/T_{wave}) \int_t^{t+T_{wave}} dt' A(t')$, nous supposons que l'écoulement moyen ne dépend pas de l'échelle de temps rapide, soit $(\bar{u}_0, \bar{v}_0) \approx (u_0, v_0)$, et nous obtenons

$$\partial_t \Omega_{0z} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} = \partial_y \left[\overline{\partial_x u'^2} + \overline{\partial_z (w' u')} \right] + \nu \Delta \Omega_{0z} . \quad (4.8)$$

Les termes non-linéaires sont ainsi la source de vorticité verticale, à travers les variations latérales (dans la direction y) de la divergence de la quantité $\bar{u}' u' \mathbf{e}_x + \bar{w}' u' \mathbf{e}_z$, de la même manière que le tenseur de Reynolds dans un écoulement turbulent est la source d'un transport.

Utilisant la définition (4.1), le terme non-linéaire de l'équation (4.8) peut être calculé explicitement et devient

$$\partial_t \Omega_{0z} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} = \frac{1}{2} \partial_y \left[m^2 \partial_x (\Psi^2) - km \partial_z (\Psi^2) \right] + \nu \Delta \Omega_{0z} , \quad (4.9)$$

où nous supposons que la longueur d'onde est beaucoup plus petite que les variations spatiales typiques de l'amplitude de l'onde. Cette séparation des échelles est satisfaite au centre du faisceau mais pas sur les bords. Cependant, cette hypothèse permet une compréhension physique simple de la dynamique, ce qui est amplement suffisant dans cette étude.

La première conséquence de l'équation (4.9) est que les non-linéarités ne peuvent pas être la source de vorticité potentielle si le champ d'onde est invariant dans la direction y . Dans les expériences montrées ici, le générateur d'ondes occupe seulement une partie de la largeur de la cuve. Nous pouvons donc nous attendre à des variations horizontales de l'amplitude de l'onde, ce qui permet de satisfaire la condition nécessaire pour observer un écoulement moyen dans un plan horizontal associé à une vorticité verticale non nulle. La deuxième conséquence est que si le champ d'onde est symétrique dans la direction y , alors le terme source dans l'équation (4.9), résultant d'une dérivation du champ d'onde par rapport à y , est antisymétrique par rapport à y . C'est le cas dans nos expériences, puisque le générateur et sa position dans la cuve sont symétriques par rapport à y . La troisième conséquence importante est que des variations dans des directions x ou z sont nécessaires pour produire de la vorticité verticale. De telles variations peuvent être dues à la viscosité. Dans ce cas, l'amplitude de l'onde décroît à partir de l'émission du générateur [39, 47] avec une distance d'atténuation typique que l'on notera ℓ . Tabaei et Akylas [66] ont montré qu'un seul faisceau d'onde ne peut pas générer d'écoulement moyen dans une configuration bi-dimensionnelle (ou axisymétrique), avec une invariance dans la direction y . Ceci est cohérent avec nos résultats qui montrent que la génération d'un écoulement moyen nécessite la variation de l'amplitude de l'onde dans la direction y . Tabaei et Akylas [66], puis Tabei, Akylas et Lamb [67] ont également montré qu'un écoulement moyen peut être généré lorsque deux faisceaux d'onde interagissent, même s'il n'y a pas de variation de l'amplitude dans la direction y . Ici encore, il n'y a pas de contradiction avec nos résultats, puisque l'écoulement moyen décrit dans leurs études est associé à une vorticité verticale égale à zéro, à cause de leur configuration invariante dans la direction y .

Nous allons décrire la structure spatiale du terme non-linéaire de l'équation (4.9) dans notre système expérimental. Nous pouvons faire une approximation raisonnable

4. INTERPRÉTATION

en disant que $\partial_z (\Psi^2) \approx 0$ à la profondeur telle que le générateur est scindé en deux moitiés égales selon la verticale (voir figure 4.2(a)) et $\Psi(x, y) = \Pi(y)e^{-x/\ell}$. La distance typique d'atténuation peut être estimée autour de 20 cm [47], ce qui veut dire que la viscosité va jouer un rôle important dans les expériences. Le générateur émet un champ d'onde symétrique selon la direction y , maximum à l'origine, et satisfaisant $\partial_y (m^2 \partial_x \Psi^2) > 0$ pour $y > 0$ et $\partial_y (m^2 \partial_x \Psi^2) < 0$ pour $y < 0$. D'après l'équation (4.9), nous pouvons conclure que le terme source induit une structure de vorticité dipolaire, qui est donc associée à un jet horizontal s'échappant du générateur.

Pour plus de simplicité, nous avons supposé dans ce chapitre que le champ d'onde est donné et nous négligeons la rétroaction due à la formation de l'écoulement moyen horizontal. Un travail futur inclura une étude analytique plus complète et plus rigoureuse du problème, en faisant le développement approprié en échelles multiples. Dans la section 5, nous montrons un effet de cette rétroaction sur le champ d'onde en présence de l'écoulement moyen.

La coupe horizontale montrée dans la figure 4.2(d) est centrée sur la plaque mobile centrale du générateur (ligne pointillée sur la figure 4.2(a)), nous pouvons donc supposer que $\partial_z \Psi^2 = 0$ dans l'équation (4.9), sauf sur les bords supérieurs et inférieurs du faisceau d'onde (voir figure 4.2(a)). Si nous supposons également que le faisceau d'onde est suffisamment atténué par la viscosité lorsque le bord supérieur du faisceau croise cette coupe horizontale, nous pouvons négliger le terme $\partial_z \Psi^2$ en tout point.

Nous supposons enfin que la longueur d'onde verticale $2\pi/m$ est beaucoup plus petite que les variations spatiales de Ψ^2 , la fonction de courant est donnée par $\Psi = U'/m$, où U' est l'amplitude de la composante horizontale du champ de vitesse de l'onde, $u' = -U'(x, y, z) \sin(\sigma t - kx - mz)$. L'équation (4.9) devient

$$\partial_t \Omega_{0z} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} = \frac{1}{2} \partial_{xy} U'^2 + \nu \Delta \Omega_{0z}. \quad (4.10)$$

  temps suffisamment court, le terme non-linéaire et le terme visqueux peuvent être négligés, et on obtient $\partial_t \Omega_{0z} \simeq \partial_{xy} U'^2 / 2$. Les déterminations expérimentales de ces deux termes sont comparées dans la figure 4.3 pour $t = 106$ s. Ce temps est beaucoup plus petit que le temps visqueux (~ 1000 s) décrit dans la dernière partie de ce chapitre. L'amplitude de $\partial_t \Omega_{0z}$ (figure 4.3(a)) est du même ordre de grandeur que le terme source (Fig. 4.3(b)) et les deux champs se correspondent bien spatialement. L'insert de la figure 4.3(a) montre une bonne corrélation spatiale entre les deux champs. La pente qui relie les deux termes est 0.46 (± 0.04), alors que la théorie prédit 1. Cette différence est sûrement due à des contributions de la variation verticale de l'amplitude de l'onde dans les expériences.

Afin d'obtenir l'évolution temporelle de l'écoulement moyen dans le plan situé à la moitié du générateur selon la verticale, il est pratique d'intégrer l'équation (4.10) sur un domaine défini comme le demi-plan de la figure 4.3(b) (domaine $\mathcal{D}^+ = [0, L_x] \times [0, L_y/2]$). Cette procédure annule exactement le terme non-linéaire même s'il est potentiellement important localement. Ainsi, en utilisant $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Omega_{0z} = \nabla \cdot (\Omega_{0z} \mathbf{u}_0)$, l'intégrale de surface de ce terme disparaît puisque $\Omega_{0z} = 0$ sur l'axe Ox et la vitesse \mathbf{u}_0 vaut zéro sur les autres bords du domaine.

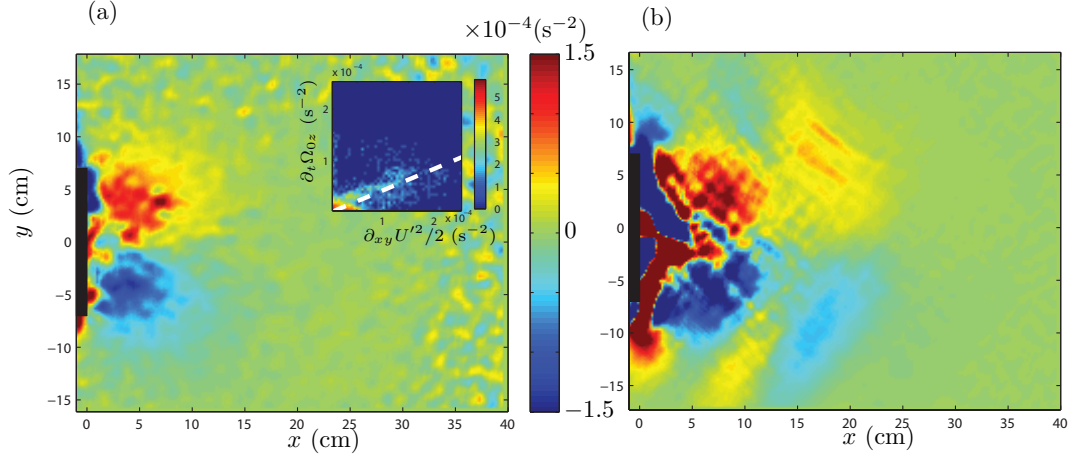


FIGURE 4.3 – Les images (a) et (b) montrent une vue de dessus dans le plan $z = 21.6$ cm, à $t = 106$ s, des deux quantités importantes apparaissant dans l'équation (4.10) : $\partial_t \Omega_{0z}$ dans l'image de gauche et $\partial_{xy} U'^2/2$ dans l'image de droite. Les deux images ont été obtenues pour $\sigma/N = 0.26$ et une excentricité de 1 cm pour les caméras. L'insert dans l'image de gauche montre un histogramme 2D de $\partial_t \Omega_{0z}$ fonction de $\partial_{xy} U'^2/2$ pour mettre en valeur la corrélation des deux quantités. La ligne pointillée correspond à la pente $0.46 (\pm 0.04)$ discutée dans le texte.

On obtient

$$\partial_t \iint_{\mathcal{D}^+} dx dy \Omega_{0z} = \frac{U'^2(0, 0, z)}{2} + \nu \iint_{\mathcal{D}^+} dx dy \Delta \Omega_{0z}. \quad (4.11)$$

L'intégrale dans le terme de gauche, que l'on nommera $I(z, t)$, peut être transformée en (avec \mathcal{C}^+ la circulation autour du domaine \mathcal{D}^+)

$$I(z, t) \equiv \iint_{\mathcal{D}^+} dx dy \Omega_{0z}(x, y, z, t) = \oint_{\mathcal{C}^+} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u}_0 \approx \int_0^{L_x} dx \mathbf{u}_0, \quad (4.12)$$

puisque le long de \mathcal{C}^+ la vitesse est non nulle seulement sur l'axe $y = 0$. Sous cette forme, $I(z, t)$ peut être identifié comme la mesure de l'amplitude du jet. L'équation (4.11) peut maintenant être écrite comme

$$\partial_t I(z, t) = \frac{U'^2(0, 0, z)}{2} + \nu \iint_{\mathcal{D}^+} dx dy \Delta \Omega_{0z}. \quad (4.13)$$

Enfin, en définissant L_0 comme la plus petite échelle caractéristique, *i.e.* selon y , de la vorticité Ω_{0z} , le terme visqueux peut être approximé par $-\nu I(z, t)/L_0^2$. L'amplitude du jet est alors solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\partial_t I(z, t) = S - \frac{\nu}{L_0^2} I(z, t), \quad (4.14)$$

4. INTERPRÉTATION

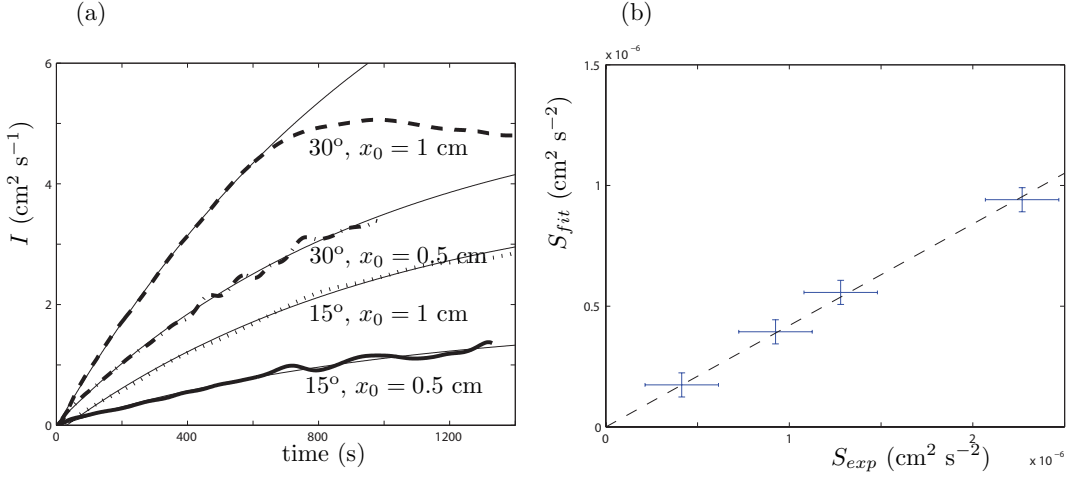


FIGURE 4.4 – L'image (a) montre l'évolution en fonction du temps de la quantité $I(z_0, t)$, avec un ajustement exponentiel. L'image (b) montre la valeur S_{fit} du terme source, estimé à partir de l'ajustement exponentiel de l'image (a), en fonction de l'estimation expérimentale S_{exp} du même terme source. La ligne pointillée correspond à l'ajustement linéaire de ces points : $S_{\text{fit}} = (0.45 \pm 0.02) S_{\text{exp}}$.

où S est le terme source $S = U'^2(0, 0, z)/2$. L'équation (4.14) montre que l'amplitude du jet $I(z, t)$ doit varier exponentiellement avec le temps et on obtient

$$I(z, t) = \frac{SL_0^2}{\nu} \left(1 - e^{-\nu t/L_0^2} \right). \quad (4.15)$$

Nous observons une telle croissance exponentielle dans la figure 4.4(a), qui représente l'évolution temporelle de la quantité $I(z, t)$ pour différentes valeurs de S et pour $z = 21.6 \text{ cm}$. Un écart à cette croissance exponentielle est observé à temps long lorsque l'écoulement moyen atteint le bord de la fenêtre de visualisation. Dans ce cas, l'intégrale $I(z, t)$ sature puisque l'approximation de l'équation (4.12) n'est plus valable. La valeur L_0^2 est estimée à partir d'un ajustement exponentiel de l'évolution de $I(z, t)$ en fonction du temps. De façon remarquable, on obtient la même échelle caractéristique $L_0 \approx 4 \text{ cm}$ pour toutes les expériences, ce qui correspond à l'épaisseur du jet selon y indiquée dans la figure 4.2(d). Nous pouvons estimer expérimentalement le terme source de deux façons : l'ajustement exponentiel (S_{fit}) et la mesure de l'amplitude de la vitesse horizontale ($S_{\text{exp}} = U'(0, 0, z)^2/2$). S_{fit} est tracé en fonction de S_{exp} dans la figure 4.4(b). Comme attendu, une relation linéaire entre ces deux estimations est obtenue. Nous trouvons que $S_{\text{fit}} = (0.45 \pm 0.02) S_{\text{exp}}$ est en accord avec la corrélation spatiale observée dans l'insert de la figure 4.3(a). Cependant, notre modèle simple prédit $S_{\text{fit}} = S_{\text{exp}}$. Cela montre que l'explication théorique présentée est valide qualitativement mais n'est pas suffisante pour estimer de façon quantitative l'amplitude du jet.

5 Phénomène de rétroaction

Nous évoquons dans cette partie, non publiée dans l'article original, le phénomène de rétroaction de l'écoulement moyen sur les ondes qui modifie la forme du champ d'onde.

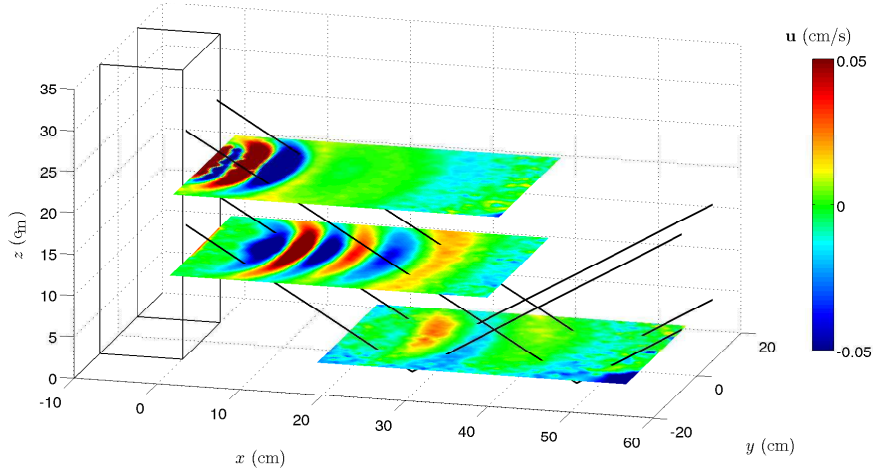


FIGURE 4.5 – Vue en trois dimensions de la vitesse de l'écoulement total u selon la direction x à $t = 120$ s. Trois expériences ont été réalisées pour $\sigma/N = 0.473$ et superposées. Les lignes pleines représentent l'enveloppe théorique du faisceau d'onde. Le générateur est schématisé à gauche en traits pleins. La cuve utilisée est de taille $120 \times 80 \times 35$ cm³.

La figure 4.5 représente une vue en trois dimensions du faisceau d'onde pour $\sigma/N = 0.473$, pour un angle de propagation de 28.3° . La figure 4.6 montre l'évolution du champ d'onde au cours du temps. Comme l'écoulement moyen est non-divergent dans un plan horizontal (contrairement au champ d'onde), on peut visualiser simplement le champ d'onde à travers la divergence de la composante horizontale de l'écoulement total. La figure 4.6(a) montre le champ d'onde à temps court lorsque l'écoulement moyen est absent et n'a pas modifié la forme du champ d'onde émis par le générateur. Nous remarquons bien que dans chaque plan horizontal les lignes isophases sont parallèles aux plaques mobiles du générateur. La figure 4.6(b) montre la déformation du champ d'onde lorsque les recirculations dues à l'écoulement moyen sont présentes. Nous pouvons analyser cette déformation de façon plus quantitative : dans le plan vertical $y = 0$, l'écoulement moyen est associé à une faible vorticité horizontale, à la différence des ondes de gravité. La figure 4.6(c) montre le faisceau d'onde (à travers la visualisation de la vorticité horizontale totale de l'écoulement) émis avant que l'écoulement moyen ne soit présent dans la zone de propagation des ondes. La figure 4.6(d) montre la courbure du faisceau d'onde lorsque l'écoulement moyen est présent. Cette déformation est faible, ce qui nous a permis de négliger la rétroaction dans l'étude précédente, mais facilement détectable.

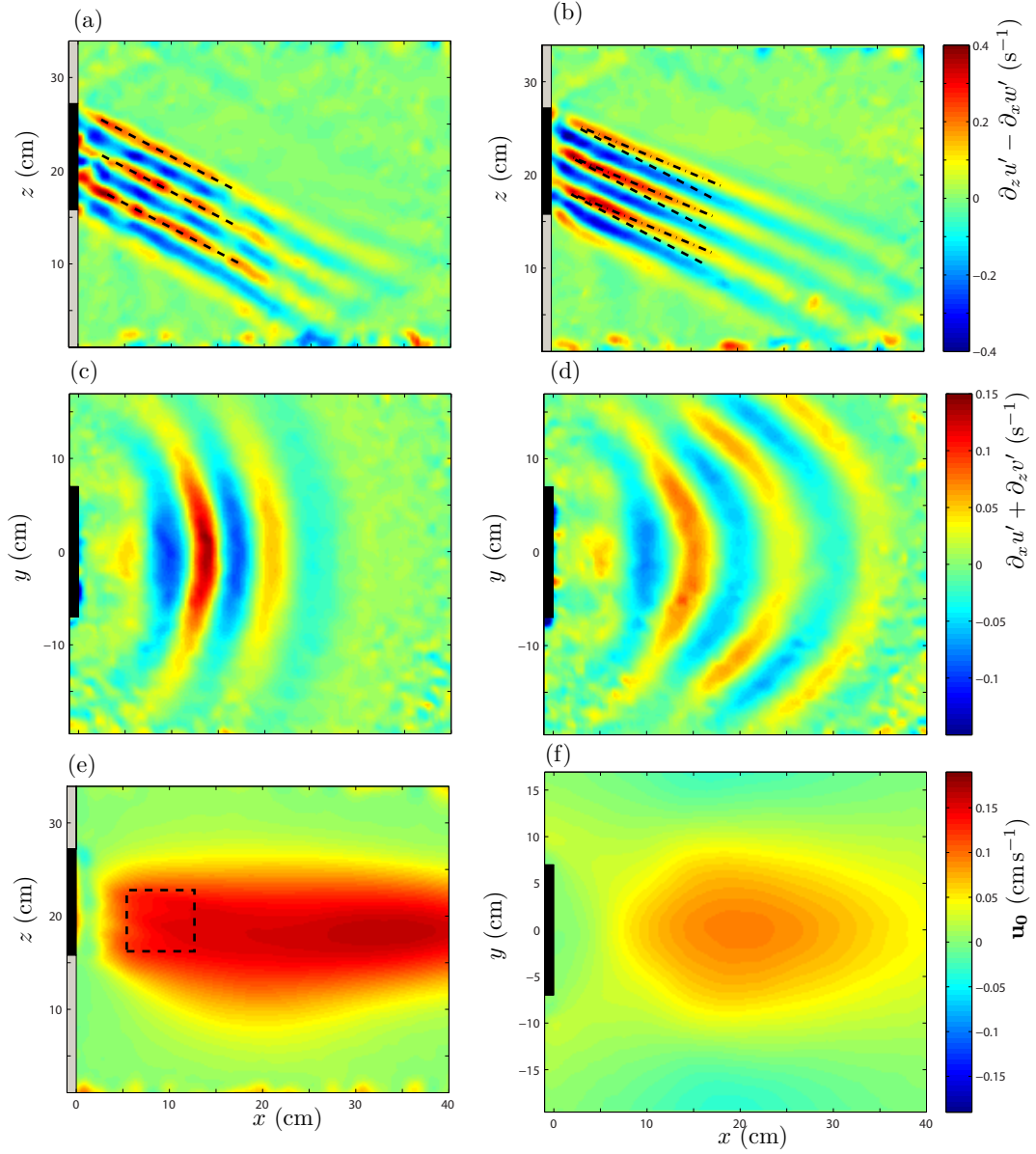


FIGURE 4.6 – Champ d’onde observé expérimentalement pour $\sigma/N = 0.473$ à $t = 65$ s (images (a) et (c)) et $t = 1000$ s (images (b) et (d)). Les images (a) et (b) montrent la vorticité $\nabla \times \mathbf{u}$ de l’écoulement total dans le plan $y=0$, et les images (c) et (d) montrent la divergence $\nabla \cdot \mathbf{u}$ dans un plan $z = 11.8$ cm. Les images (e) et (f) représentent la composante u_0 de l’écoulement moyen à $t = 1000$ s, dans les plans $y = 0$ et $z = 11.8$ cm respectivement. Les lignes pointillées dans les figures (a) et (b) montrent la direction de propagation de l’onde sans la présence de l’écoulement moyen. Les lignes en tirets/points dans la figure (b) montrent la nouvelle direction de propagation en présence de l’écoulement. Le cadre en pointillé dans la figure (e) montre l’endroit où la vitesse de l’écoulement moyen a été mesurée.

Ce phénomène est très bien décrit par Godoy *et al.* [24], dans le cadre de l'interaction d'un tourbillon avec une onde interne de gravité. En effet, nous pouvons facilement comprendre le phénomène en se plaçant dans le référentiel en mouvement lié à l'écoulement moyen. Nous pouvons écrire la nouvelle relation de dispersion due à cet effet Doppler en notant σ_r la fréquence de l'onde dans le référentiel en mouvement,

$$\sigma = \sigma_r + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0, \quad (4.16)$$

$$= \sigma_r + k u_0, \quad (4.17)$$

$$= N \sin \theta_r + k u_0. \quad (4.18)$$

Nous pouvons donc comparer θ qui est l'angle que devrait avoir le faisceau d'onde avec l'horizontale, tel que $\sin \theta = \sigma/N$ en l'absence d'écoulement moyen et θ_r , tel que $\sin \theta_r = (\sigma - k u_0)/N$ l'angle observé en présence de l'écoulement (voir figures 4.6(c) et (d)). Sur l'expérience citée en exemple, nous pouvons contrôler qu'au centre du faisceau, l'écoulement atteint une vitesse typique $u_0 = 1.50 \pm 0.05$ mm/s. Nous calculons alors l'angle théorique de fléchissement du faisceau

$$\theta_{r,th} = \sin^{-1}(\sigma - k u_0), \quad (4.19)$$

$$= 22.2^\circ(\pm 0.5), \quad (4.20)$$

que l'on compare à l'angle observé au centre du faisceau $\theta_{r,obs} = 23^\circ(\pm 1)$ avec un très bon accord, correspondant à un fléchissement du faisceau d'environ 5° pour cette expérience ($\theta = 28.3^\circ$). Pour l'expérience montrée dans la figure 4.2, correspondant à un angle de 15° , le fléchissement est d'à peine 1° .

6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre des observations expérimentales d'un fort écoulement moyen horizontal généré par des ondes internes lorsqu'une onde monochromatique progressive est forcée sur le côté d'une cuve remplie d'un fluide stratifié. Nous insistons également sur le fait qu'aucun écoulement moyen n'existe en l'absence d'ondes internes de gravité, par exemple, lorsque le générateur est excité à une pulsation σ plus grande que la pulsation de Brunt-Väisälä N , comme dans la référence [32].

L'ingrédient clé nécessaire à l'existence de cette vorticité verticale, sous la forme d'une structure dipolaire, associée à un fort jet s'échappant du générateur, est l'existence concomitante de variations de l'amplitude de l'onde dans les deux directions horizontales. Dans la direction transverse (y), les variations sont simplement dues au fait que le générateur d'ondes est localisé dans un segment plus petit que la largeur de la cuve. Dans la direction longitudinale, les variations de l'amplitude de l'onde sont dues à l'atténuation visqueuse. Cela montre le rôle très important joué par la viscosité dans la génération de l'écoulement moyen dans nos expériences.

Cependant, nous sommes certains que les mécanismes physiques donnés ici pour la génération d'un fort écoulement moyen grâce à l'interaction d'ondes monochromatiques, a un intérêt au-delà du régime visqueux. N'importe quel processus physique qui mène à une variation de l'amplitude de l'onde peut aboutir à la formation d'un écoulement moyen horizontal robuste. De telles variations peuvent venir par exemple

6. CONCLUSION

de l'instabilité paramétrique sous-harmonique [31] (discutée au chapitre 3 pour les ondes inertielles), du déferlement des ondes [55], de la superposition de plusieurs faisceaux d'onde [37], ou de la génération d'ondes focalisées [26]. Ceci fera l'objet d'un travail ultérieur.

Remerciements

Les auteurs remercient M. Lasbleis pour certaines expériences préliminaires. Le travail de recherche à l'ENS Lyon a été soutenu par les subventions ANR-08-BLAN-0113-01 « PIWO », ANR-2011-BS04-006-01 « ONLITUR » et « CIBLE 2010 » de la Région Rhône-Alpes.

Chapitre 5

Génération expérimentale de tourbillons en fluide stratifié

Résumé

Dans ce chapitre, on souhaite montrer qu'il est possible de produire de façon stable et contrôlée des tourbillons en milieu stratifié tournant et non tournant. Cette problématique rejoint plus largement le problème non résolu de la dissipation des ondes internes dans l'océan, qui peuvent interagir avec des structures à méso-échelle comme des tourbillons de grande taille dans l'océan. Après un régime transitoire lié à la génération expérimentale, les tourbillons générés en fluide stratifié non tournant se dissipent par viscosité à cause de la diffusion verticale de quantité de mouvement. Les résultats expérimentaux sont comparés à un modèle analytique qui inclut des effets uniquement visqueux. Lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est assez petit, les tourbillons générés sont stables, reproductibles et on montre qu'ils suivent de façon probante le modèle utilisé. Lorsque le fluide environnant est en rotation solide, une stabilité accrue permet l'obtention de tourbillons de très grande taille. Initiée en petite cuve au LEGI, cette étude s'est poursuivie au laboratoire de physique de l'ENS Lyon puis sur la plateforme Coriolis liée au LEGI à Grenoble.

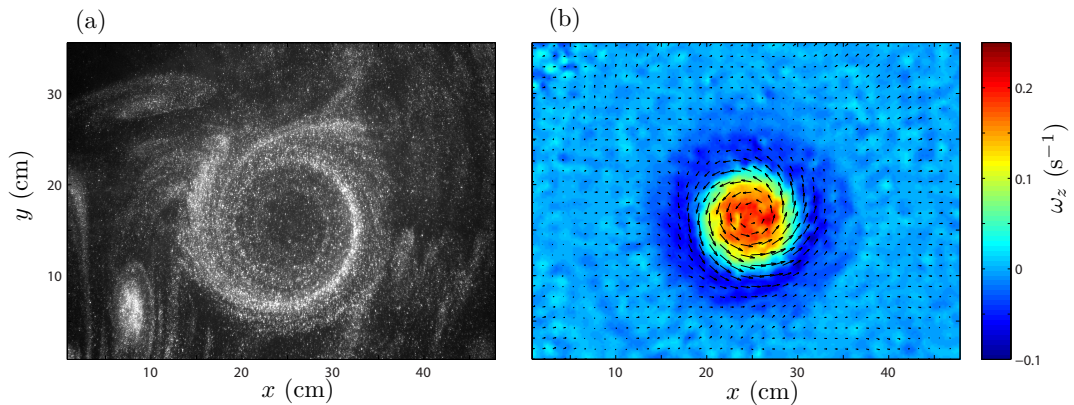


FIGURE 5.1 – Monopôle lenticulaire vu de dessus dans un plan $z = 0$, en fluide stratifié non tournant. (a) Trace laissée par le tourbillon sur les particules présentes dans le fluide. (b) Champ de vitesse (flèches) et de vorticité (en couleur).

1 Tourbillons lenticulaires en milieu stratifié non tournant.

1.1 Échelle caractéristique

Les écoulements visés ici se situent toujours au sein d'un fluide stratifié associé à une pulsation de Brunt-Väisälä N . Pour un écoulement d'extension spatiale horizontale L_h et verticale L_v , on associe les deux nombres de Froude horizontal et vertical suivants, déjà présentés précédemment, $F_h = U/(NL_h)$, et $F_v = U/(NL_v)$. Les mouvements associés aux ondes gravito-inertielles sont découplés des mouvements tourbillonnaires si ces deux nombres sont petits. Or Billant et Chomaz ont montré que ces mouvements de rotation s'organisent en couches d'épaisseur $L_v \sim U/N$, appelée échelle de flottabilité [6]. Cela donne lieu à un nombre de Froude vertical $F_v \sim 1$. Si l'on force des tourbillons de plus grande échelle verticale, ces derniers auront tendance à se réorganiser en couches d'épaisseur U/N , à travers par exemple l'instabilité zig-zag [5]. Comme les termes d'interaction entre mouvements rotationnels et ondulatoires sont de l'ordre de F_v , on peut conclure que l'hypothèse de mouvement quasi bi-dimensionnel n'est pas vérifiée pour des échelles verticales dépassant l'échelle de flottabilité. Le rapport d'aspect du tourbillon L_v/L_h sera de l'ordre de F_h . On s'est donc restreint uniquement à l'étude de tourbillons lenticulaires, les seuls pouvant être stables en fluide stratifié.

1.2 Système expérimental

Les expériences ont été menées dans deux laboratoires différents pour sonder plusieurs échelles. Des expériences à petite échelle ont été menées à Lyon dans une cuve de 120 cm de longueur, 80 cm de largeur et 42.5 cm de profondeur, remplie de 35 cm d'eau salée. Les expériences à plus grande échelle ont été menées sur la plateforme Coriolis à Grenoble, qui fait 13 m de diamètre et 110 cm de profondeur remplie avec 90 cm d'eau salée (voir Fig. 5.2). Le fluide est stratifié en densité avec une pulsation de Brunt-Väisälä $N = \sqrt{-(g/\rho)\partial_z\rho}$, valant 0.85 rd/s à Lyon et 0.35 rd/s à Grenoble.

On utilise un cylindre creux en acier inoxydable dont le diamètre varie de 10 à 120 cm (voir figures 5.3 et 5.4(b)). Les expériences menées ont leurs paramètres résumés dans le tableau 5.1. À l'aide d'une pompe péristaltique, on prélève du fluide à l'intérieur du cylindre pour le réinjecter tangentiellement au cylindre sur le diamètre opposé, comme indiqué sur la figure 5.4(a). En pratique, le protocole utilisé pour les cylindres de diamètres 10 cm et 15 cm (à Lyon) pour le débit maximum (expériences 2 et 3) était le suivant :

- allumage de la pompe péristaltique à 12 mL/min pendant 3 minutes à travers un tuyau de 1.7 mm de diamètre intérieur,
- puis 21 mL/min pendant 3 minutes,
- puis 30 mL/min pendant 3 minutes,
- pompe éteinte pendant 2 minutes,
- retrait automatisé du cylindre (vitesse 5 mm/s) pendant environ 60 s.

Les débits ont été divisés par deux pour l'expérience 1, tout en gardant le même protocole.

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.

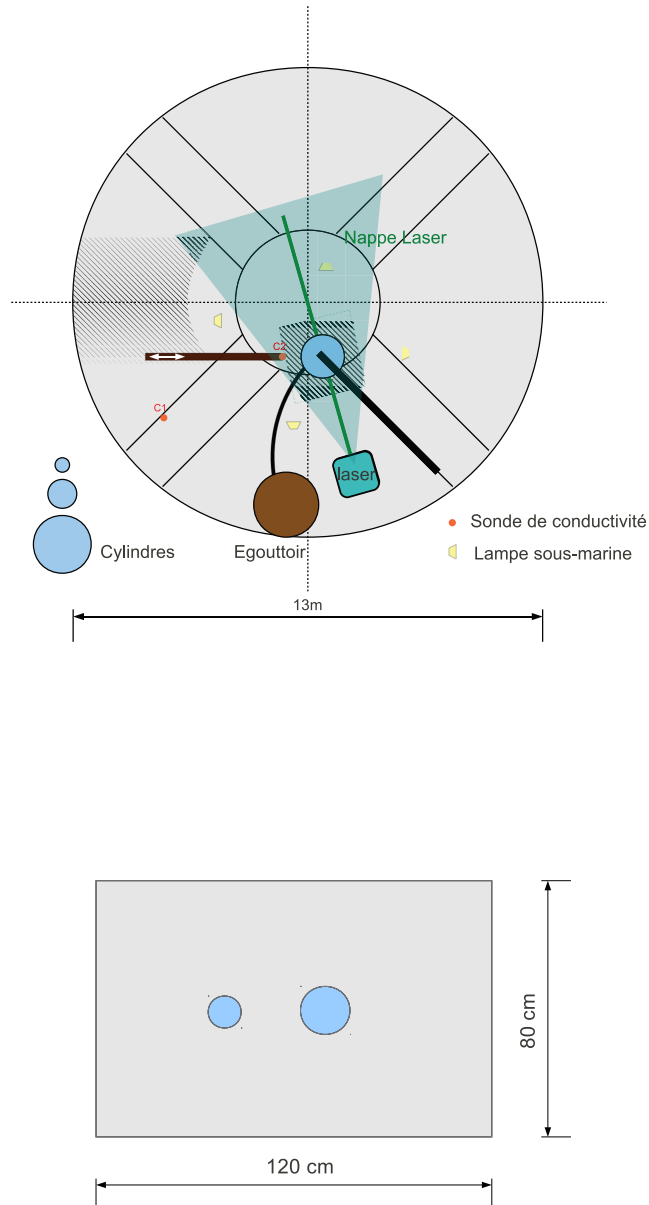


FIGURE 5.2 – En haut, schéma représentant la plateforme Coriolis vue de dessus. La zone d’observation est représentée en grisé au centre de la cuve. Les diamètres des cylindres sont à l’échelle. En bas, schéma représentant la cuve utilisée à Lyon. Deux cylindres de 10 cm et 15 cm de diamètre sont également représentés.

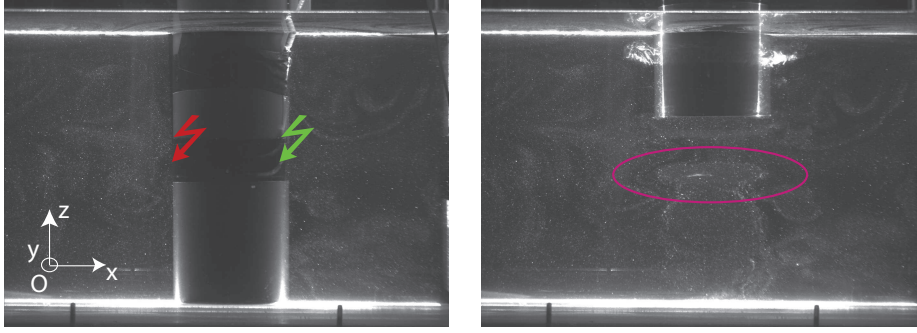


FIGURE 5.3 – Vues de côté représentant un cylindre de 15 cm de diamètre dans 35 cm d’eau stratifiée. Le cylindre est posé au fond de la cuve (à gauche), et après une dizaine de minutes ce dernier est retiré (à droite). Les flèches verte et rouge sur la figure de gauche indiquent les endroits de pompage et de réinjection du fluide.

Le mouvement ainsi créé se propage jusqu’au centre par diffusion et le tourbillon s’épaissit également. Il faut augmenter progressivement le débit de façon à garder un jet laminaire à la sortie du tuyau d’injection, afin d’éviter la création de zones de mélange. Dans le cas contraire, une zone homogène mélangée se crée à l’intérieur du cylindre et lors du retrait de ce dernier, un étalement radial du tourbillon est inévitable. Le retrait doit se faire également à vitesse réduite de façon à éviter un sillage. Dans notre cas, si le cylindre a une épaisseur de 1 mm, et que la vitesse de retrait du cylindre vaut $5 \cdot 10^{-3} \text{m/s}$, alors le nombre de Reynolds associé vaut $Re = 5$ correspondant bien à un écoulement laminaire derrière le cylindre. Des ondes peuvent être observées, mais on évite de mélanger le fluide.

Les champs de vitesse sont obtenus ici en utilisant le même système de PIV que dans le chapitre précédent. Un exemple a été montré dans la figure 5.1 dans le résumé introductif de ce chapitre, correspondant à un cylindre utilisé de 15 cm, une minute après le retrait du cylindre. Cependant, sur la plateforme Coriolis, les champs observés sont de plus grande taille. Les particules utilisées sont des particules de polystyrène qui peuvent atteindre 1 mm de diamètre et qui sont en isodensité avec le fluide environnant. À Grenoble, le montage présenté figure 5.4(b), était plus complexe mais fondé sur le même principe en adaptant les tailles. Une pompe non péristaltique de plus forte puissance a été utilisée, et le nombre de paires d’injecteurs a été augmenté jusqu’à quatre paires (une injection et une aspiration pour une paire) pour les plus gros diamètres (voir tableau 5.1).

1.3 Modèle

La solution générale du champ de vitesse et de vorticité est fondée sur le modèle de Beckers *et al.* [2], semblable au modèle utilisé par Trieling [69] en 1996. Ce modèle décrit la décroissance d’un tourbillon lenticulaire à l’aide d’un modèle prenant uniquement en compte les effets visqueux. Pour des fluides fortement stratifiés, le mouvement du fluide peut être considéré comme quasi bi-dimensionnel (cette hypothèse doit cependant être prise avec précaution, voir par exemple [6] pour davantage

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.

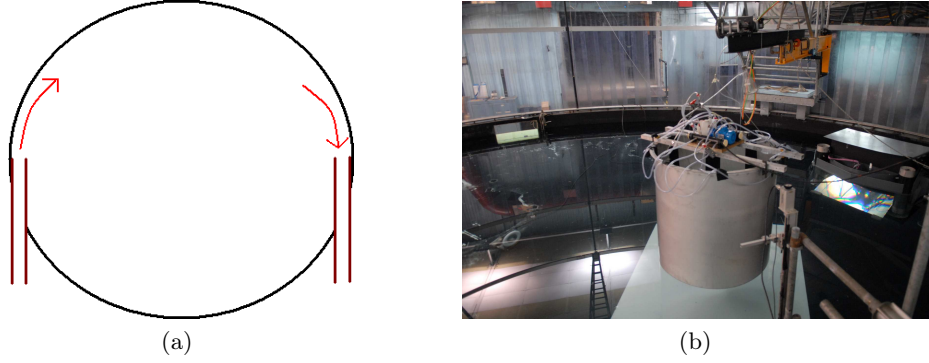


FIGURE 5.4 – (a) Principe d'injection à l'intérieur du cylindre creux. (b) Image de la plateforme Coriolis avec un cylindre de 120 cm posé au centre. Le système de pompage apparaît sur le dessus.

de détails). On rappelle qu'on définit un fluide fortement stratifié à l'aide du nombre de Froude horizontal $F_h = U_h/(LN)$, où U_h et L sont respectivement la vitesse et la dimension horizontale caractéristiques de l'écoulement et où N est la pulsation de Brunt-Väisälä (voir chap. 1). Pour un tel fluide fortement stratifié, $F_h \ll 1$. On prendra des coordonnées cylindriques pour décrire l'écoulement, avec r la coordonnée radiale, θ la coordonnée azimutale et z la coordonnée verticale. Dans ce système de coordonnées, on pose $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$ le champ de vitesse de l'écoulement tourbillonnaire et $\boldsymbol{\omega} = (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)$ le champ de vorticité associé. On considère alors dans cette hypothèse de fluide fortement stratifié que les mouvements verticaux sont annihilés ($u_z = 0$), et l'écoulement est supposé axisymétrique ($\partial_\theta = 0$). L'incompressibilité apporte alors une condition supplémentaire, interdisant les mouvements radiaux de fluide ($u_r = 0$). On peut poser alors l'existence d'une fonction de courant ψ telle que $(u_r, u_\theta) = (r^{-1}\partial_\theta\psi, -\partial_r\psi)$. Avec les hypothèses précédentes, l'équation du mouvement (1.2) s'écrit, dans le système de coordonnées choisi, sous la forme suivante

$$\frac{-u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho_0}\partial_r p', \quad (5.1)$$

$$\partial_t u_\theta = \nu \left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u_\theta) - \frac{u_\theta}{r^2} + \partial_{zz} u_\theta \right), \quad (5.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\partial_z p' - \rho'g. \quad (5.3)$$

Le tourbillon diffuse dans les directions horizontale et verticale, et l'équation (5.2) permet de découpler les dépendances selon l'horizontale et la verticale, en écrivant $u_\theta(r, z, t)$ sous la forme

$$u_\theta = u(r, t)h(z, t). \quad (5.4)$$

On obtient alors les deux équations pour u et h

$$\partial_t u = \nu \left(\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) - \frac{u}{r^2} \right), \quad (5.5)$$

$$\partial_t h = \nu\partial_{zz}h. \quad (5.6)$$

On va supposer un profil initial dont on va chercher l'évolution temporelle au cours du temps. Il se trouve que le profil de vitesse obtenu grâce à cette technique expérimentale est particulièrement bien décrit par un profil introduit par Carton *et al.* [11] du type

$$u_{\theta}^*(r^*) = r^* \exp(-r^{*2}), \quad (5.7)$$

$$\omega_z^*(r^*) = 2(1 - r^{*2}) \exp(-r^{*2}), \quad (5.8)$$

où l'on introduit des grandeurs étoilées adimensionnées : $r^* = r/R$, $u_{\theta}^* = u_{\theta}/U$. R et U sont des taille et vitesse caractéristiques du tourbillon étudié. Le profil est dit gaussien à cause de la forme de la fonction de courant $\psi^*(r) = \frac{1}{4} \exp(-r^{*2})$. On cherche alors une solution autosimilaire de la forme

$$u = f(t) u_{\theta}^*(r/R), \quad (5.9)$$

où f est une fonction arbitraire du temps et u_{θ}^* est définie par le modèle (5.7). Une analyse dimensionnelle nous impose d'écrire R sous la forme

$$R = \delta \sqrt{\nu t}, \quad (5.10)$$

où δ est une constante à déterminer. On utilise alors les relations suivantes

$$\partial_t u = u_{\theta}^* \partial_t f - \frac{r^*}{2t} f \partial_{r^*} u_{\theta}^*, \quad (5.11)$$

$$\nu \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u) - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{f}{\delta^2 t} \left(\frac{1}{r^*} \partial_{r^*} (r^* \partial_{r^*} u_{\theta}^*) - \frac{u_{\theta}^*}{r^{*2}} \right), \quad (5.12)$$

lesquelles par substitution dans (5.5) nous amènent au polynôme en r^* suivant

$$\left(\frac{2f}{\delta^2 t} - \frac{f}{2t} \right) r^{*3} + \left(-\frac{4f}{\delta^2 t} + \frac{f}{4t} - \frac{1}{2} \partial_t f \right) r^* = 0. \quad (5.13)$$

On trouve alors $\delta = 2$ et $f \sim t^{-3/2}$. On peut écrire alors la vitesse azimutale sous la forme

$$u = C \frac{r}{2(\nu t)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad (5.14)$$

où C est une constante dépendant des conditions initiales. En pratique, le tourbillon existe déjà à $t = 0$ et on réécrit donc, en redéfinissant l'origine des temps,

$$u = \frac{U}{L} \frac{r}{(1 + (4\nu/L)t)^2} \exp\left(-\frac{(r/L)^2}{(1 + (4\nu/L)t)^2}\right), \quad (5.15)$$

où L est le rayon du tourbillon à l'origine des temps tel que $\omega(r = L, z = 0, t = 0) = 0$.

Il faut aborder maintenant la diffusion selon la verticale. On suppose qu'on a initialement un profil gaussien selon z

$$h^*(z) = \frac{1}{(2\pi\Lambda^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(z/L)^2}{2\Lambda^2}\right), \quad (5.16)$$

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.

avec $\Lambda = \lambda/L$, le rapport d'aspect du tourbillon, et λ l'épaisseur du vortex initial dans la direction verticale z . L'équation (5.6) permet d'établir la dynamique liée à la diffusion selon la verticale qui va donc s'écrire sous la forme suivante

$$h^*(z) = \frac{1}{(2\pi\Lambda^2)^{1/2}(2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(z/L)^2}{2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t}\right). \quad (5.17)$$

On obtient alors le profil complet de vitesse suivant

$$u_\theta = \frac{U}{L} \frac{r}{2\pi^{1/2}(2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t)^{1/2}(1 + (4\nu/L^2)t)^2} \times \exp\left(-\frac{(z/L)^2}{2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t}\right) \exp\left(-\frac{(r/L)^2}{1 + (4\nu/L^2)t}\right). \quad (5.18)$$

On obtient également la vorticité verticale qui s'écrit

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r}, \quad (5.19)$$

$$\omega_z = \frac{U}{L} \frac{1}{\pi^{1/2}(2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t)^{1/2}(1 + (4\nu/L^2)t)^2} \left(1 - \frac{(r/L)^2}{1 + (4\nu/L^2)t}\right) \times \exp\left(-\frac{(z/L)^2}{2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t}\right) \exp\left(-\frac{(r/L)^2}{1 + (4\nu/L^2)t}\right). \quad (5.20)$$

Au temps initial, on peut s'intéresser aux profils radiaux de la vorticité verticale et de la vitesse azimutale, dont un exemple est donné figure 5.5. On aura ainsi accès au paramètre L présent dans le modèle (5.20). On a

$$\omega_z(r, z=0, t=0) = \omega_0 \left[1 - \left(\frac{r}{L}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right], \quad (5.21)$$

$$\omega_z(r=0, z, t=0) = \omega_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2\lambda^2}\right), \quad (5.22)$$

$$u_\theta(r, z=0, t=0) = u_0 \frac{r}{L} \exp\left[-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right], \quad (5.23)$$

avec ω_0 et u_0 définis comme

- $\omega_0 = U/((2\pi)^{1/2}L\Lambda)$, mesuré à partir d'une vue de dessus.
- $u_0 = U/(2^{3/2}\pi^{1/2}\Lambda)$, mesuré à partir d'une vue de dessus.

Si on reprend l'équation (5.20) en considérant la vorticité maximum en $r=0$ et $z=0$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \omega_{z,max} &= \omega_z(r=0, z=0, t) \\ &= \frac{U}{L} \frac{1}{\pi^{1/2}(2\Lambda^2 + (4\nu/L^2)t)^{1/2}(1 + (4\nu/L^2)t)^2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

La méthode de génération permet de fixer trois paramètres U , L , λ . La vitesse d'injection initiale fixe U , la taille du cylindre fixe L et le temps d'injection fixe λ , puisque par diffusion le tourbillon s'épaissit. On a vu que le nombre de Froude horizontal mesure l'impact de la stratification sur le caractère quasi bi-dimensionnel ou non de l'écoulement. Par exemple pour l'expérience 3, $L \simeq 5$ cm, $u_0 \simeq 4$ mm/s, $N=0.85$ donc $F_h = u_0/(NL) = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0.85 \times 5 \cdot 10^{-2}} \approx 0.1$, et le milieu est bien considéré comme fortement stratifié. On peut définir également un nombre de Reynolds $Re = u_0 L / \nu \approx 230$, montrant un écoulement plutôt laminaire.

1.4 Résultats

Le tableau 5.1 résume les expériences menées au sein des différents laboratoires.

Expérience	1	2	3	4	5
Plateforme	Lyon	Lyon	Lyon	Coriolis	Coriolis
Diam. cylindre (cm)	10	15	15	40	80
Diam. tuyau d'injection (cm)	0.17	0.17	0.17	0.6	0.6
Nbre d'injecteurs	1	1	1	2	3
Débit total pompage (mL/min)	30	15	30	$1.0 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^4$
u_0 (cm/s)	0.29	0.21	0.41	0.91	2.57
L (cm)	3.66	5.50	5.60	15.8	28.7
λ (cm)	3.10 (fit)	3.27 (fit)	3.15 (mesuré)	3.30 (mesuré)	non mes.
Re	106	115	230	1400	7400
F_h	$9.3 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	$8.36 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^{-1}$

TABLE 5.1 – Paramètres des différentes expériences menées.

Étude spatiale

On enregistre tout d'abord un profil spatial après ajustement du tourbillon qui définit l'origine des temps. On a accès ainsi à l'intensité initiale du tourbillon à travers le paramètre u_0 et à sa taille initiale L . L'exemple montré figure 5.5, correspond à l'expérience 3. On peut également avoir accès à un profil du maximum de vorticité

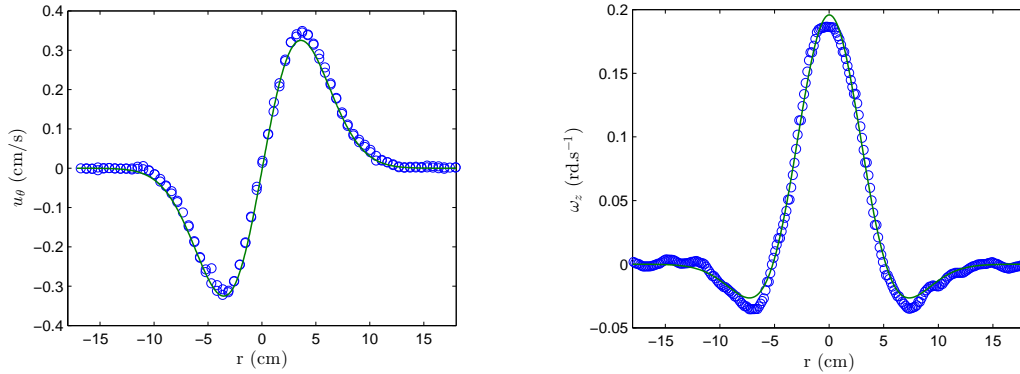


FIGURE 5.5 – Profils de vitesse azimutale (à gauche) et de vorticité (à droite) pour l'expérience 3 à $t = 50$ s. Les cercles représentent les points expérimentaux, la ligne pleine représente le meilleur ajustement des modèles (5.23) et (5.21) respectivement.

selon la verticale, de manière à avoir l'épaisseur du tourbillon. L'équation (5.22) nous permet d'anticiper un profil gaussien selon z pour le tourbillon. La figure 5.6 montre

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.

l'épaisseur du tourbillon pour les expériences 3 et 4. On remarque que l'épaisseur du tourbillon pour l'expérience 4 est très proche de celle de l'expérience 3, ayant pourtant un diamètre trois fois supérieur. On se rappellera que l'épaisseur est un paramètre difficile à fixer, a priori contrôlé par la durée de pompage avant enlèvement du cylindre d'acier.

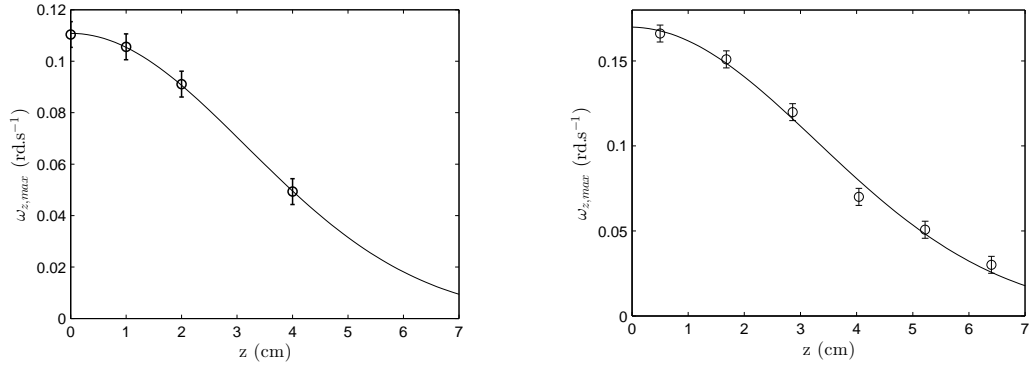


FIGURE 5.6 – À gauche, profil de vorticité maximale de l'expérience 3 selon z à $t = 200$ s, superposé à une distribution gaussienne de paramètre $\lambda = 3.15$ cm, fondée sur le modèle (5.22). À droite, même profil pour l'expérience 4 avec $\lambda = 3.30$ cm.

La figure 5.7 représente le profil de vitesse azimutale u_θ/u_0 en fonction de la coordonnée radiale adimensionnée r/L , pour les expériences 1, 3 et 4. On remarque que la loi d'échelle proposée est parfaitement vérifiée.

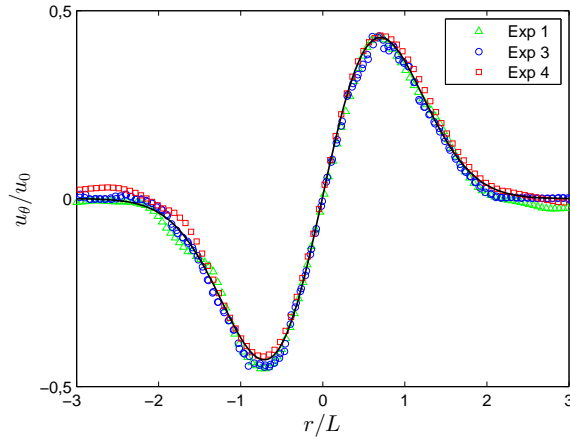


FIGURE 5.7 – Profil de vitesse azimutale à l'instant initial pour les expériences 1 (triangles), 3 (ronds) et 4 (carrés), en variables adimensionnées. Le modèle (5.23) est représenté en trait plein.

Étude temporelle

On s'intéresse maintenant à la décroissance dans le temps du maximum de vortacité $\omega_{z,max}$, qui ne dépend plus que d'un seul paramètre libre : l'épaisseur initiale du tourbillon λ . Ce paramètre a été mesuré expérimentalement dans les expériences 3 et 4 (voir figure 5.6). Pour les expériences 1 et 2, la valeur du paramètre libre ajustant au mieux le modèle utilisé dans la décroissance de la vortacité maximum (voir figure 5.8) a été indiquée, valeur tout à fait cohérente avec les valeurs mesurées pour l'expérience numéro 3.

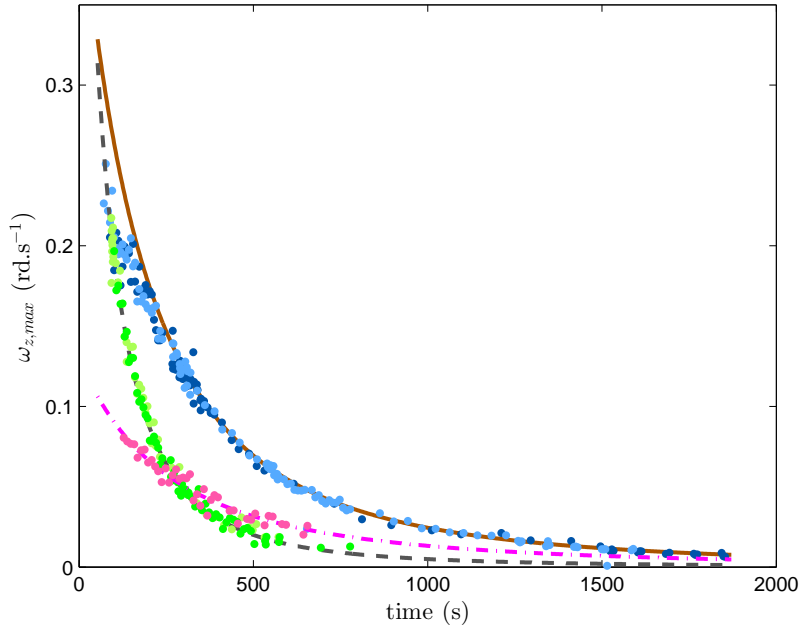


FIGURE 5.8 – Évolution dans le temps du maximum de vortacité du tourbillon. Les points correspondent aux données expérimentales sur lesquels les meilleurs ajustements du modèle (5.24) sont superposés : en trait pointillé l'expérience 1, en trait pointillé/plein l'expérience 2, et en trait plein l'expérience 3.

À des échelles assez petites, les tourbillons générés sont très bien décrits par le modèle utilisé dans les parties précédentes. La figure 5.8 montrant l'évolution de la vortacité maximum en fonction du temps montre une parfaite adéquation du modèle avec les données expérimentales et ce, en utilisant les paramètres spatiaux initiaux du tourbillon généré.

On peut s'intéresser également à l'évolution du rayon R du tourbillon défini tel que $\omega(r = R, z = 0, t) = 0$. Ainsi on peut écrire

$$R(t) = L \left(1 + \frac{4\nu}{L^2} t \right)^{1/2}. \quad (5.25)$$

La figure 5.9, représentant l'évolution du carré du rayon adimensionné $R(t)^2/L^2$ en fonction du temps adimensionné t/t^* où $t^* = L^2/(4\nu)$, montre cette évolution

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.

linéaire valable pour différents rayons initiaux des tourbillons créés. On observe un très bon accord avec le modèle. Par diffusion de quantité de mouvement, le tourbillon s'épaissit dans la direction verticale, et augmente son rayon par le même phénomène. Cette augmentation de taille vérifie deux points cruciaux : elle est linéaire en temps à temps court et vérifie la loi d'échelle telle que l'accroissement du rayon soit inversement proportionnel au carré du rayon initial. Ainsi, pour des tourbillons de plus grande taille, comme celui de l'expérience 4, généré à l'aide d'un diamètre de 40 cm, la méthode de génération proposée laisse apparaître un tourbillon pouvant suivre le modèle présenté. Ce dernier conserve un rayon constant durant la durée de l'expérience, mais ceci est en accord avec le raisonnement précédent. Comme les échelles de temps mises en jeu varient comme l'inverse du carré du rayon, le tourbillon laisse apparaître une dynamique très lente. Il faut cependant noter qu'il n'a pas été possible de suivre convenablement ce tourbillon pendant une durée nécessaire au suivi de son évolution (voir Fig 5.9). En effet, des courants moyens sont en permanence excités à la surface libre de la plateforme à cause de la convection de l'air ambiant et se propagent à l'intérieur du fluide. Les vitesses de dérive du tourbillon sont faibles, mais malheureusement suffisantes pour ne pas permettre une localisation constante du tourbillon au cours du temps dans la zone de mesure. La plateforme Coriolis 2, en cours de construction à Grenoble, sera complètement fermée. L'air emprisonné sera alors en rotation solide à la même vitesse que le fluide, ce qui devrait résoudre le problème évoqué.

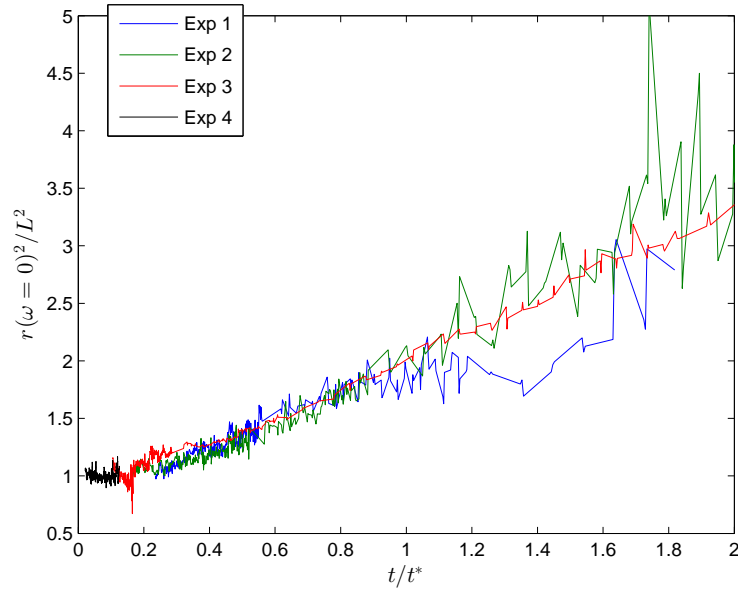


FIGURE 5.9 – Évolution dans le temps des rayons des tourbillons (adimensionnés par leurs valeurs initiales L). Le temps est aussi adimensionné par $4\nu/L^2$ comme défini dans l'équation (5.25).

Pour de plus grands rayons, le tourbillon n'est pas stable et la condition d'axisymétrie n'est pas vérifiée (voir figure 5.10). Le nombre de Reynolds atteint $Re = 5 \cdot 10^3$

pour le tourbillon généré avec un diamètre de 80 cm. De plus, il est très difficile de mettre en rotation le fluide au centre du cylindre. En effet, si l'on considère que le fluide au centre se met en mouvement uniquement par diffusion à partir du mouvement de pompage situé sur les bords, ce temps de diffusion varie comme le carré du rayon du cylindre. Pour un diamètre de 15 cm, il est de l'ordre de la dizaine de minutes. Pour un diamètre de 80 cm, il s'approche plutôt de la dizaine d'heures. Après une période d'ajustement, on voit apparaître une instabilité de cisaillement. Celle-ci laisse place à un monopôle accompagné de deux satellites répartis de part et d'autre du tourbillon central (voir figure 5.10)(d).

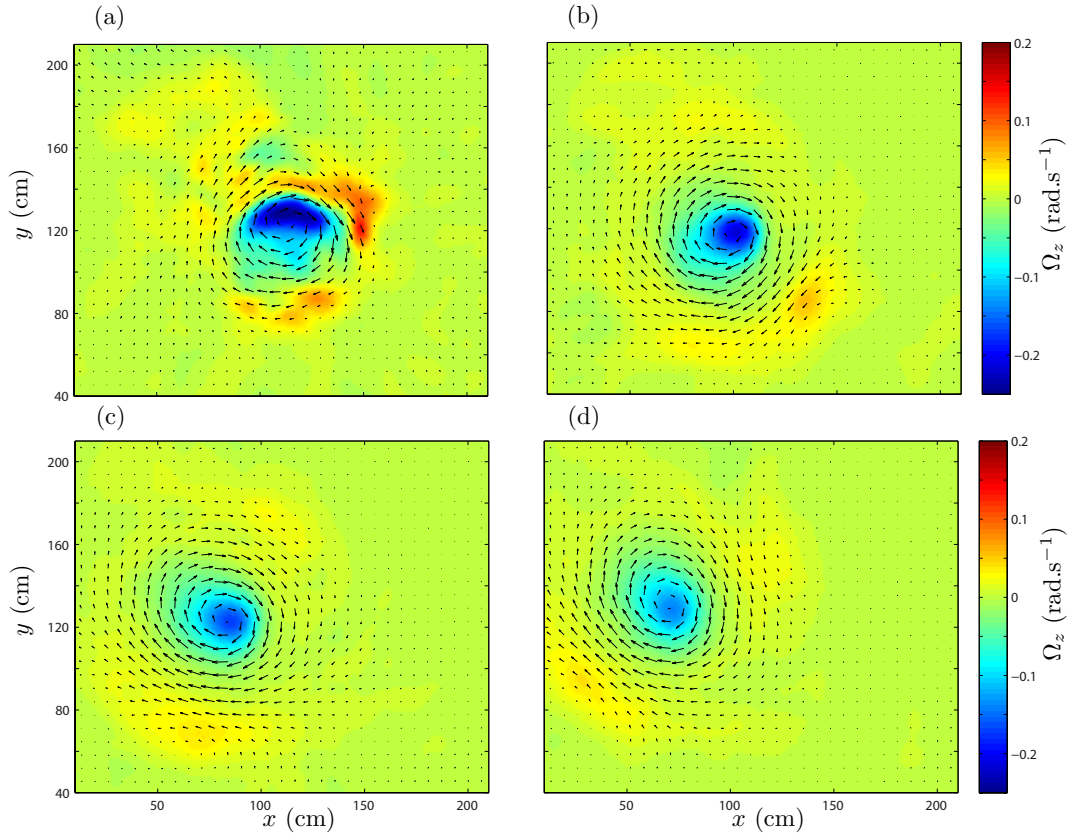


FIGURE 5.10 – Champs de vitesse et de vorticité pour l'expérience 5 à $t = 150$ s (a), $t = 300$ s (b), $t = 450$ s (c), $t = 600$ s (d) après l'enlèvement du cylindre d'acier.

L'évolution temporelle d'un tourbillon généré avec un cylindre de 120 cm est représentée en figure 5.11. On remarque que le centre du tourbillon n'est pas affecté par la rotation forcée par le système de pompage. Le profil de vitesse varie de façon abrupte lorsque la coordonnée axiale passe en-dessous d'un certain rayon, menant à une instabilité. Un tripôle apparaît contenant cette fois-ci deux satellites de grande taille par rapport au tourbillon central.

1. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN MILIEU STRATIFIÉ NON TOURNANT.



FIGURE 5.11 – Évolution temporelle suivie par colorant d'un tourbillon généré à l'aide d'un cylindre de 120 cm de diamètre. L'image de gauche a été prise pendant le pompage. L'image centrale a été prise quelques secondes après le retrait du cylindre et l'image de droite 5 min après.

1.5 Conclusion

De cette étude, on doit retenir qu'il est possible de créer de façon reproductible un tourbillon lenticulaire à l'intérieur d'un fluide stratifié non tournant, pourvu que ce tourbillon ne dépasse pas une certaine taille. De plus, il est facile de changer les paramètres de génération du tourbillon. Le diamètre du cylindre utilisé joue sur son rayon, le débit du pompage détermine sa force, et le temps du pompage influe sur son épaisseur. Un modèle analytique décrit parfaitement la dynamique du tourbillon.

2 Tourbillons lenticulaires en fluide stratifié tournant

Dans une deuxième partie, on s'intéresse à la génération de tourbillons de grande taille en fluide stratifié et tournant. La situation est différente de la partie précédente. En plus de se rapprocher des conditions océaniques, la présence d'une rotation de fond change drastiquement le comportement d'un mouvement tourbillonnaire, en apportant entre autres, une stabilité accrue pour certains types de tourbillons. On peut distinguer deux familles : des tourbillons cycloniques dont la vorticité est de même signe que la rotation de fond, et des tourbillons anticycloniques dont la vorticité est de signe opposé à la rotation de fond. L'évolution de tourbillons isolés est asymétrique pour les cyclones et anticyclones. À grande échelle, les cyclones ont tendance à se déstabiliser alors que les anticyclones ont tendance à se stabiliser [64], même si cette asymétrie disparaît dans la limite quasi-géostrophique. On ne s'intéressera par la suite qu'aux tourbillons lenticulaires anticycloniques.

2.1 Échelles caractéristiques en milieu stratifié tournant

On prend en compte (ou non) la rotation terrestre par la force de Coriolis à travers un nombre sans dimension, le nombre de Rossby $Ro = U/(fL_h)$, en notant U et L_h la vitesse et l'échelle caractéristiques horizontales de l'écoulement et f le paramètre de Coriolis. C'est le rapport sans dimension entre le terme d'accélération et le terme lié à la force de Coriolis. On considère des écoulements lents par rapport à la rotation de fond, ce qui correspond à des écoulements géophysiques à la surface de la Terre. Ces écoulements pour lesquels $Ro \ll 1$, sont appelés écoulements géostrophiques et satisfont au premier ordre l'équilibre entre la force de Coriolis et la force de pression,

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P. \quad (5.26)$$

On parle d'écoulements quasi-géostrophiques lorsque l'on utilise les équations du mouvement, non plus pour $Ro = 0$ mais de façon perturbative en $Ro \ll 1$.

Lorsque l'on parle d'un fluide fortement stratifié ($F_h = U/(NL_h) < 1$) et fortement tournant ($Ro < 1$), il existe donc deux effets antagonistes pour déterminer l'échelle verticale de l'écoulement. En effet, la rotation tend à augmenter l'échelle verticale L_v alors que la stratification tend à la réduire. Le rapport des échelles verticale et horizontale est de l'ordre de $L_v/L_h \sim f/N$. Ce rapport vaut plutôt 0.1 à 0.01 au fond de l'océan et plutôt dix fois moins dans la thermocline proche de la surface. Les structures sont dans tous les cas plutôt aplaties. On définit alors la hauteur quasi-géostrophique H_g de ces écoulements par $H_g = L_h f/N$. Il existe une limite aux grandes échelles de l'approximation quasi-géostrophique abordée précédemment. L'océan (comme l'atmosphère) est une enveloppe de faible épaisseur H . L'approximation quasi-géostrophique s'applique si $H_g < H$, soit $L_h < HN/f$. On introduit une nouvelle échelle caractéristique dépendant de la stratification et de la rotation : le rayon de déformation $R_d = HN/f$, dit rayon de déformation de Rossby. Ce nombre est de l'ordre de quelques milliers de kilomètres dans l'atmosphère et autour de 100 km dans l'océan profond.

Pour une vitesse donnée, si l'écoulement a une taille caractéristique légèrement plus petite que le rayon de déformation, l'écoulement est sensible à la fois à la rotation

2. TOURBILLONS LENTICULAIRES EN FLUIDE STRATIFIÉ TOURNANT

Petite échelle	Méso-échelle	Grande échelle
$L_h < 50 \text{ m}$	$50 \text{ m} < L_h < 1 \text{ km}$	$1 \text{ km} < L_h < R_d$
$F_h > 1, Ro > 1$	$F_h < 1, Ro > 1$	$F_h < 1, Ro < 1$

TABLE 5.2 – Différentes échelles d'écoulements à l'intérieur de l'océan, déterminées pour une vitesse typique d'écoulement de 0.1 m/s.

de fond et à la stratification. Pour des écoulements dits à méso-échelle, l'écoulement ressent la stratification du fluide environnant mais beaucoup moins la rotation. Aux petites échelles, la condition de fluide fortement stratifié ne tient plus puisque le nombre de Froude horizontal $F_h = U/(NL_h)$ devient supérieur à 1. La stratification n'influence plus l'écoulement qui redevient isotrope. Le tableau 5.2 résume les différents cas.

2.2 Protocole expérimental

Pour générer un tourbillon anticyclonique dans un fluide stratifié, une technique plus simple que celle abordée précédemment est utilisée. Il suffit d'injecter du fluide à une densité donnée en un point précis de la cuve qui devient le centre du tourbillon en formation. On ajuste de façon précise l'altitude d'injection, de façon à introduire le fluide à la même densité que le fluide environnant à la même altitude (voir Figure 5.12).

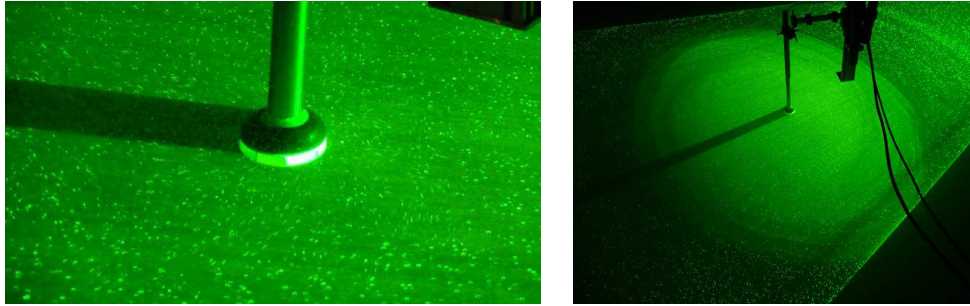


FIGURE 5.12 – À gauche, système d'injection de fluide pour la création de tourbillons anticycloniques en milieu stratifié tournant. À droite, génération d'un tourbillon anticyclonique de volume $V = 300 \text{ L}$, 50 minutes après le début de l'injection.

Trois expériences différentes ont été menées. Un premier tourbillon de 20 L (voir figure 5.13) de fluide homogène a été injecté, un autre tourbillon créé avec 160 L, et un dernier avec 300 L de fluide injecté. Pour une hauteur d'eau stratifiée de 90 cm, le fluide a été injecté à la moitié de la hauteur à une densité $d = 1.017$ pour une stratification linéaire du fluide environnant telle que $N = 0.60 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Le débit d'injection a été fixé à 1 L/min pour le tourbillon de 20 L (durée d'injection 20 minutes) et jusqu'à 8 L/min de façon progressive pour le tourbillon de 300 L (durée

d'injection 50 minutes). La figure 5.12(b) montre un tourbillon lenticulaire d'environ 2.50 m de diamètre, visible grâce l'ajout d'une petite quantité de rhodamine-6G, fluorescent à la longueur d'onde du laser. Un système de PIV, dit « 3D/2C » pour « tridimensionnel/deux composantes de vitesse », a été utilisé pour permettre l'obtention d'un champ de vitesse horizontal en trois dimensions. Le miroir orientant la nappe laser horizontale est déplacé rapidement à l'aide d'un moteur pour prendre une image quasi-instantanée du volume de fluide observé. L'expérience montrée ici a permis d'observer le champ de vitesse d'un cube de fluide, dont les prises de vue des images tri-dimensionnelles sont espacées dans le temps de 1.6 s. Trente images sont prises pendant le déplacement vertical sur 30 cm de la nappe laser, et la prise de vue d'une paire de volumes a été répétée toutes les 15 s. Comme la nappe laser descend de façon continue lors de son parcours, le temps d'exposition de la caméra doit être réduit au minimum (~ 20 ms) pour avoir une image nette de chaque tranche de fluide observée.

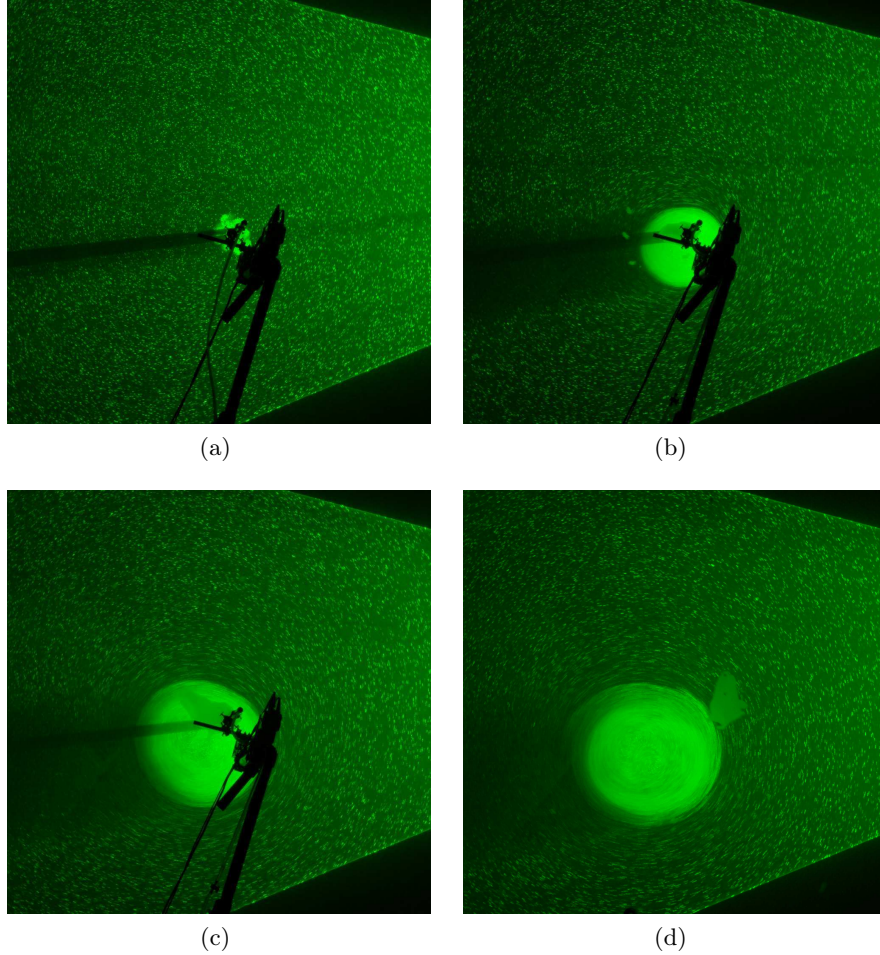


FIGURE 5.13 – Génération d'un tourbillon anticyclonique de volume $V = 20 L$, à $t = 1$ min (a), 7 min (b), 17 min (c) et 27 min(d) après le début de l'injection de fluide homogène à l'altitude $z = 45$ cm.

2.3 Résultats

La figure 5.14 montre une coupe de la norme de la vitesse et de la vorticité dans un plan $z = 0$ par rapport au centre du tourbillon. Le tourbillon adopte une forme d'anneau, laissant apparaître un fort déficit de vitesse au centre. On remarque que la vorticité présente un minimum au centre du tourbillon. Le profil de vorticité fait apparaître un anneau extérieur de vorticité positive et un anneau intérieur de vorticité négative. Cette distribution est nécessaire car la circulation totale loin du tourbillon doit être nulle. Le tourbillon est dit isolé. Dans chaque plan horizontal, l'aire pondérée de l'anneau de vorticité positive est égale à l'aire pondérée de l'anneau de vorticité négative.

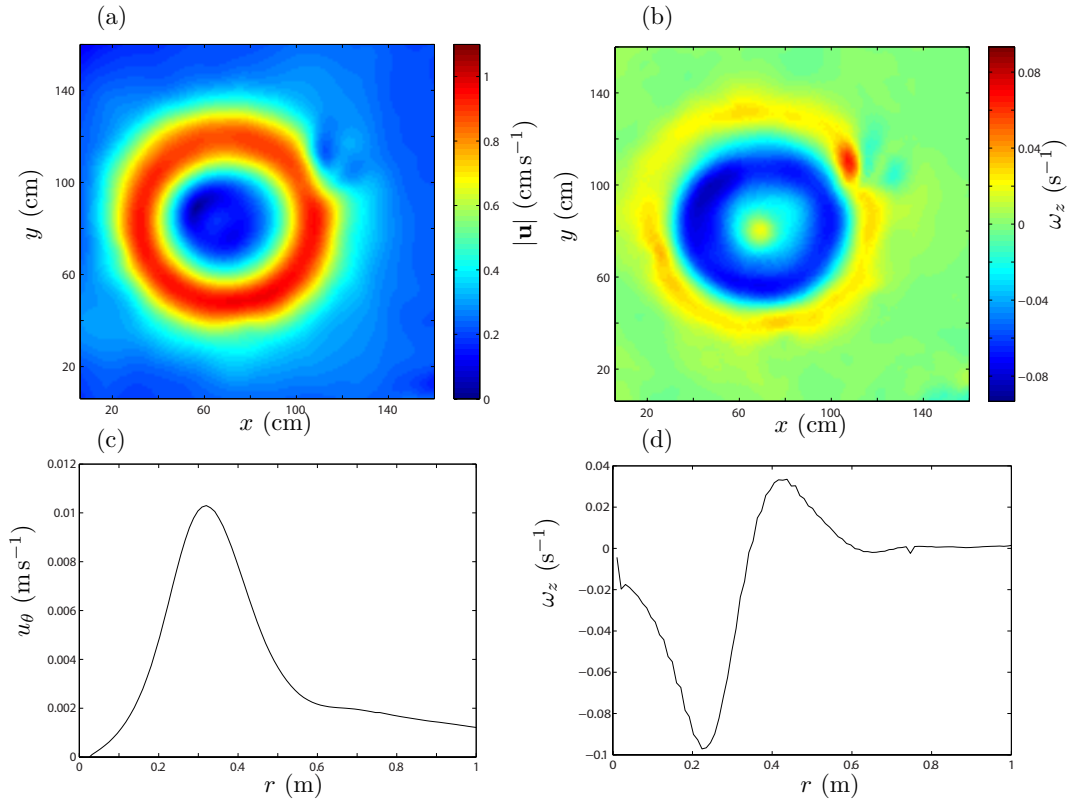


FIGURE 5.14 – Norme de la vitesse (a) et vorticité associée (b) à $t = 181$ s, dans le plan médian du tourbillon, après l'injection totale de 20 L de fluide homogène de densité ($d = 1.0169$) dans un fluide stratifié de pulsation de Brunt-Väisälä $N = 0.60$. Profils expérimentaux de vitesse azimutale $u_\theta(r, z = 0)$ (c), et de vorticité verticale $\omega_z(r, z = 0)$ (d), à $t = 181$ s.

On s'est intéressé à la structure tri-dimensionnelle du tourbillon généré. Les figures 5.15 et 5.16 montrent respectivement quelques isosurfaces de vorticité et de vitesse. Le tourbillon reste quasiment axisymétrique lors de sa durée de vie. La figure 5.17 montre un profil de la vitesse azimutale en un point de l'anneau de vitesse. La distribution de vitesse selon la verticale ne suit pas un profil gaussien comme dans la partie précédente.

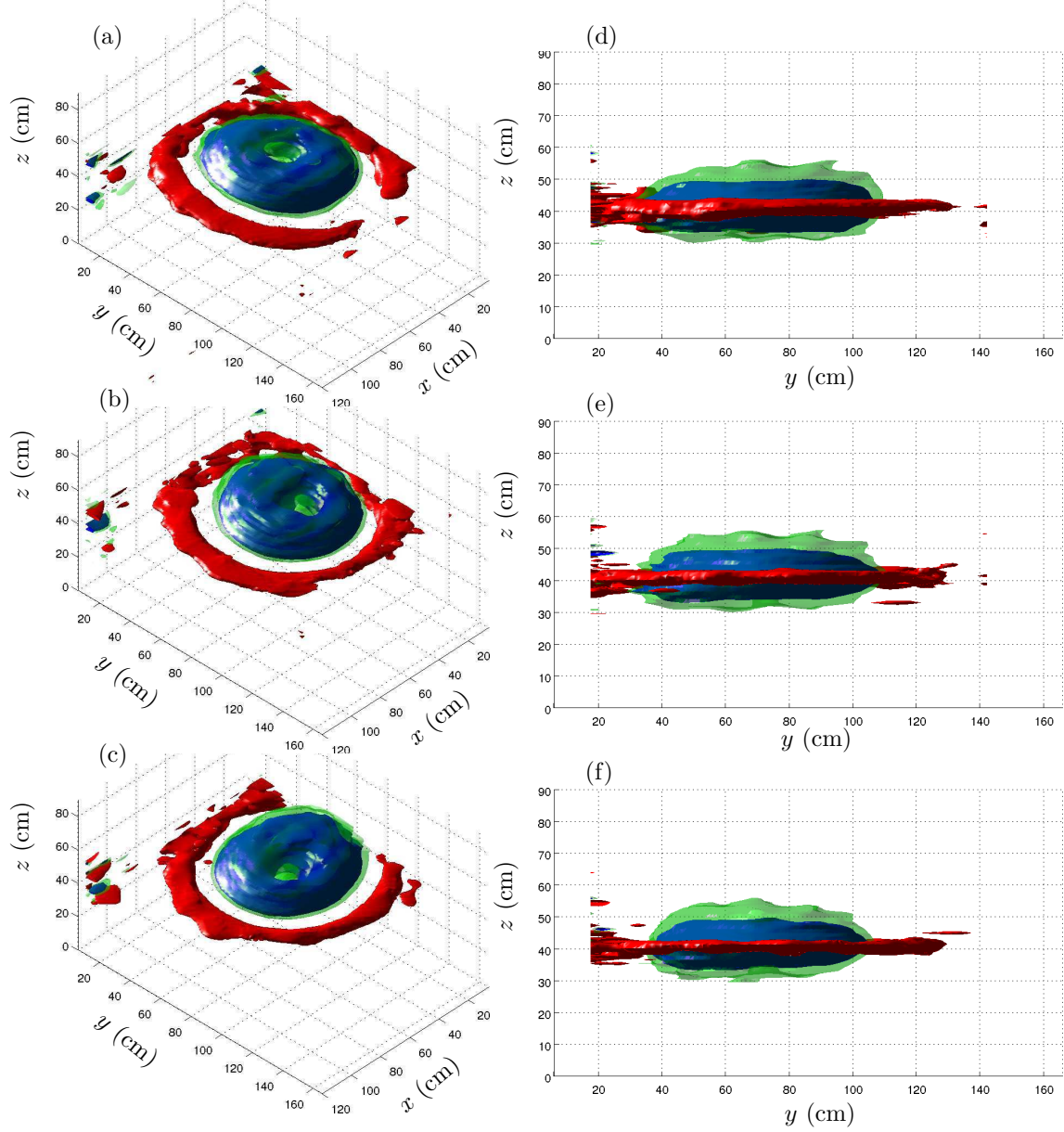


FIGURE 5.15 – Isosurfaces de vorticité 14 minutes après le retrait de l’injecteur en (a) et (d). Les images (b,e) et (c,f) représentent le même champ 1 min 30 s après ou 3 min après les images (a,d) respectivement. L’anneau extérieur de vorticité positive, en rouge, est l’isosurface de la vorticité verticale $\omega_z = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$. L’anneau intérieur, bleu foncé, est l’isosurface de vorticité verticale $\omega_z = -0.015 \text{ rad.s}^{-1}$ et la surface verte en transparence est l’isosurface $\omega_z = -0.010 \text{ rad.s}^{-1}$.

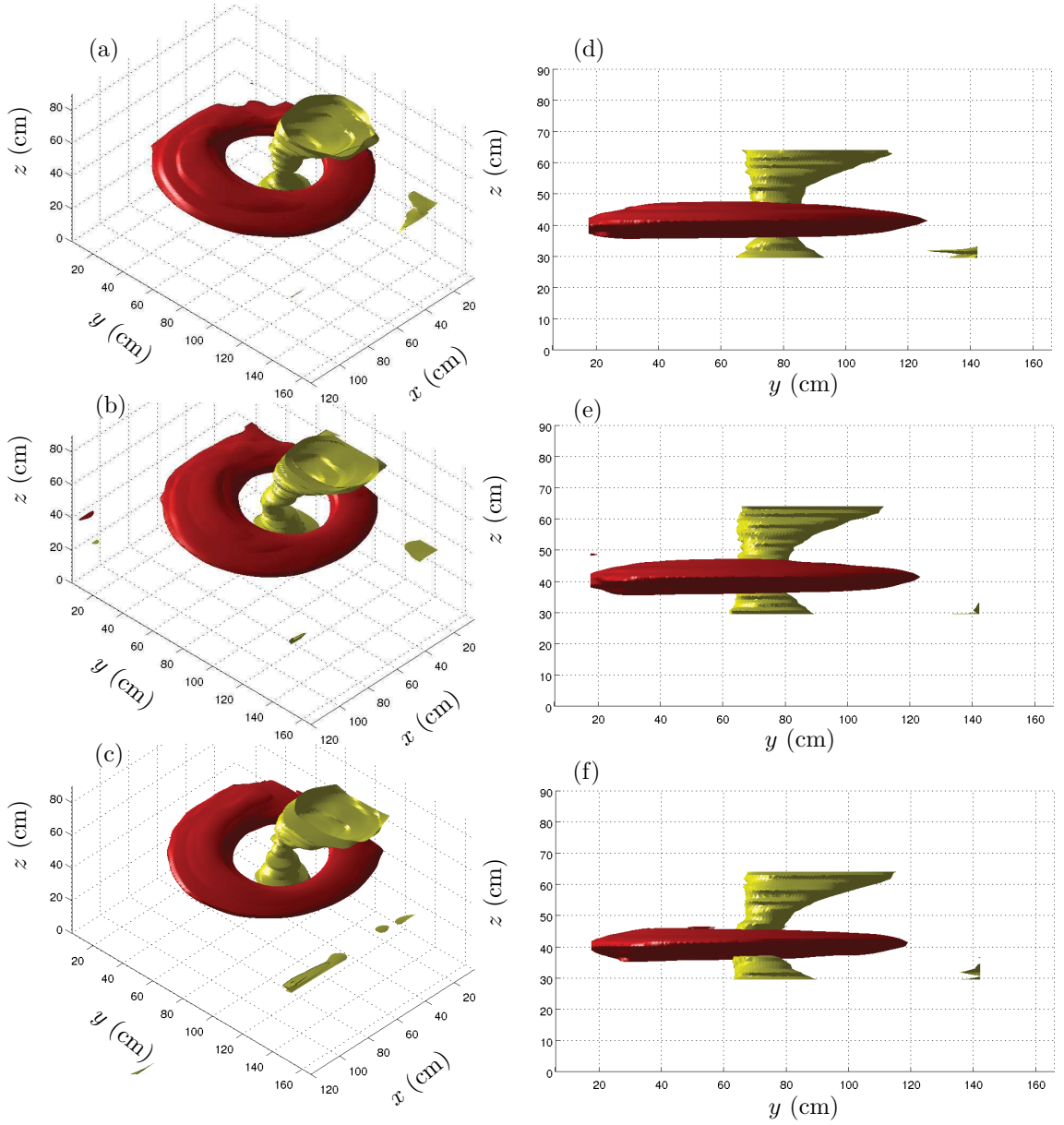


FIGURE 5.16 – Isosurfaces de la norme de la vitesse 14 minutes après le retrait de l'injecteur en (a) et (d). Les images (b,e) et (c,f) représentent le même champ 1 min 30 s après ou 3 min après les images (a,d) respectivement. La surface extérieure, en rouge, est l'isosurface de la norme de la vitesse pour une vitesse de 3 mm/s. La surface intérieure, en jaune, est l'isosurface de la norme de la vitesse pour une vitesse de 0.1 mm/s.

3 Vorticité potentielle

On s'intéresse dans cette partie aux corrections de la vorticité potentielle par la modification de la densité. On essaiera de déterminer la stabilité du tourbillon avec des arguments généraux sur la relation entre vorticité potentielle et fonction de courant. On peut accéder à la vorticité potentielle, grandeur caractéristique du tourbillon. On rappelle l'équation d'Euler,

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} - f(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}). \quad (5.27)$$

On se place dans l'approximation d'un écoulement axisymétrique, et on pose $\partial_t = \partial_\theta = 0$ et $u_r = u_z = 0$,

$$\partial_r p = \rho \left(f u_\theta + \frac{u_\theta^2}{r} \right), \quad (5.28)$$

$$\partial_z p = -\rho g. \quad (5.29)$$

L'équation associée à la vorticité,

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = -f(\mathbf{e}_z + \omega) \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}, \quad (5.30)$$

devient avec les hypothèses précédentes,

$$-(f + \omega_z) \partial_z u_\theta - \omega_r \partial_r u_\theta + \frac{1}{\rho^2} (-\partial_r \rho \partial_z p + \partial_z \rho \partial_r p) = 0. \quad (5.31)$$

En utilisant (5.28) et (5.29), on obtient une relation reliant la vitesse au gradient de densité,

$$-(f + \omega_z) \partial_z u_\theta - \omega_r \partial_r u_\theta + \frac{g}{\rho} \partial_r \rho + \frac{1}{\rho} \left(f u_\theta + \frac{u_\theta^2}{r} \right) \partial_z \rho = 0. \quad (5.32)$$

Comme $\omega_r = -\partial_z u_\theta$ et $\omega_z = \partial_r u_\theta + u_\theta/r$, on obtient

$$-\left(f + \frac{u}{r}\right) \partial_z u_\theta + g \partial_r \ln \rho + \left(f u_\theta + \frac{u_\theta^2}{r}\right) \partial_z \ln \rho = 0. \quad (5.33)$$

Dans notre cas, l'anneau de vitesse ne dépasse pas 0.5 cm/s. On a $f u_\theta \ll gH/L$ car $f u \sim 10^{-2} \text{m.s}^{-2}$, $H/L \sim f/N \sim 0.1$ et $gH/L \sim 1 \text{m.s}^{-2}$. On peut donc négliger le dernier terme (hypothèse que l'on pourra contrôler a posteriori) pour obtenir par intégration

$$\ln \rho(r, z) = \ln \rho_\infty(z) - \frac{1}{g} \int_r^\infty \left(f + \frac{u_\theta}{r} \right) \partial_z u_\theta dr. \quad (5.34)$$

Le profil de vitesse selon la verticale est important pour remonter aux différentes grandeurs. La figure 5.17 montre que le profil de vitesse s'accorde avec un profil du type

$$u_\theta(r, z) = a(r) \exp(-|z|/b), \quad (5.35)$$

3. VORTICITÉ POTENTIELLE

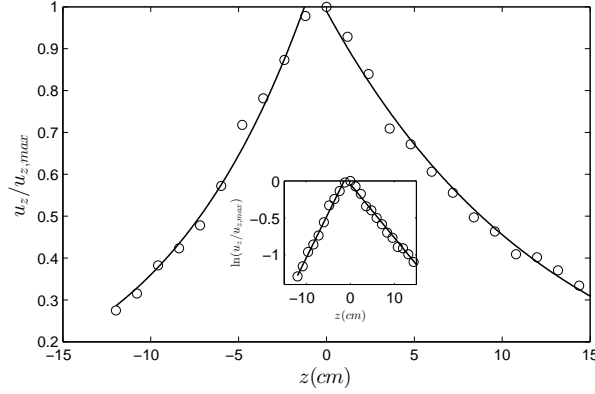


FIGURE 5.17 – Profil vertical de vitesse pris au maximum du profil horizontal en $r = 35$ cm, 14 min après le retrait de l'injecteur. L'insert représente le même profil en échelle log/lin. Les données expérimentales sont représentées par des cercles et un ajustement exponentiel est représenté par les lignes pleines (voir texte).

pour $z \neq 0$, avec $b = 10 \cdot 10^{-2}$ m ($\pm 1 \cdot 10^{-2}$ m). On ajustera par continuité les fonctions proposées et leurs dérivées au voisinage de $z = 0$. En effet, dans ce voisinage, la densité du fluide est constante. Un profil typique est proposé dans la figure 5.20.

On peut écrire la vorticité potentielle q de la façon suivante

$$q = -(\omega + f \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \ln \rho, \quad (5.36)$$

le signe moins permettant d'avoir q du même signe algébrique que f et ω_z . Finalement,

$$q = -(\omega_z + f) \partial_z \ln \rho + \partial_z u \partial_r \ln \rho. \quad (5.37)$$

On peut évaluer chacun des termes de cette équation en utilisant la relation (5.34). On utilise la définition de la pulsation de Brunt-Väisälä telle que $N^2 = -g \partial_z \ln \rho_\infty$ et on introduit la fonction de courant $\psi(r, z) = \int_r^\infty u dr$, représentée dans la figure 5.18 pour $z = 0$, et on obtient

$$q = \frac{(\omega_z + f)}{g} [N^2 + f \partial_{zz} \psi] + NL, \quad (5.38)$$

où

$$NL = \frac{f}{g} (\partial_z u)^2 + \frac{(f + \omega_z)}{g} \int_r^\infty \frac{1}{r} \partial_{zz} \frac{u^2}{2} dr. \quad (5.39)$$

Numériquement chacun des termes peut être estimé, $N^2 = 0.36 \text{ s}^{-2}$ et pour $z = 0$, la première correction linéaire due à la densité $f \partial_{zz} \psi = f/b^2 \psi(r, z = 0)$, ne dépasse pas 0.08 s^{-2} au centre du tourbillon. L'allure est donnée par celle de $\psi(r)$ sur la figure 5.18 au coefficient f/b^2 près. Le terme non-linéaire NL ne dépasse pas $1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et sera négligé par la suite. La vorticité potentielle se résume donc à

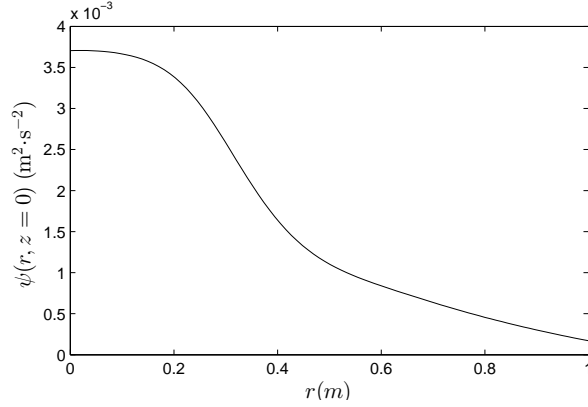


FIGURE 5.18 – Fonction de courant $\psi(r, z = 0)$ calculée à $t = 181$ s, d'après le profil expérimental de vitesse de la figure 5.14(c).

$$q = \frac{(\omega_z + f)}{g} [N^2 + f \partial_{zz}\psi]. \quad (5.40)$$

On montre dans la figure 5.19(a), la forme de la vorticité potentielle en fonction du rayon dans le plan $z = 0$. La figure 5.19(b) montre la variation de la vorticité potentielle en fonction de ψ . Charney et Stern [12] ont généralisé le critère de Ray-

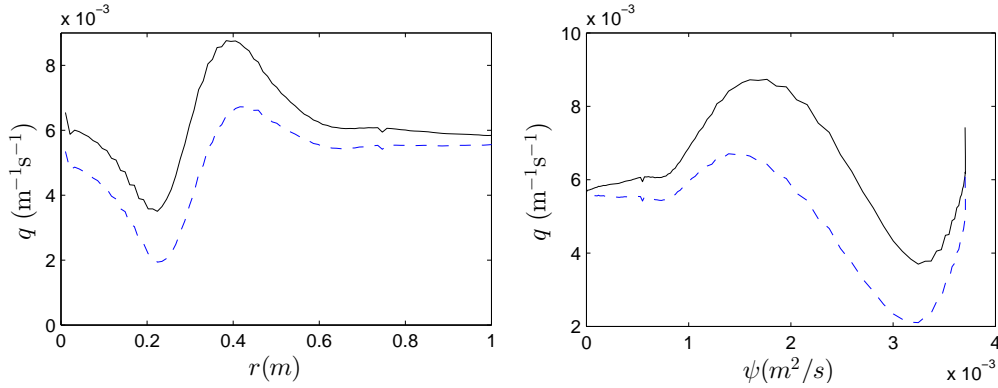


FIGURE 5.19 – Vorticité potentielle en fonction de r à gauche et en fonction de ψ à droite pour $t = 181$ s et $z = 0$. La ligne pleine est la vorticité potentielle totale avec la correction due à la densité. La ligne pointillée représente la grandeur approchée $(\omega_z + f)N^2/g$.

leigh [58] pour les instabilités baroclines. Ils montrent que si $\partial_\psi q$ change de signe à l'intérieur d'une couche ou entre deux couches, alors une instabilité peut croître. C'est cependant une condition nécessaire et non suffisante. Le tourbillon créé plus haut voit cette condition nécessaire d'instabilité satisfaite. Cependant, le tourbillon est stable et reste quasiment axisymétrique pendant sa durée de vie : l'anneau de vorticité positive, visible sur la figure 5.15, reste continu et circulaire pendant la

durée du vie du tourbillon, et ce, pour un grand nombre de Reynolds.

Hedstrom et Armi [28] avaient utilisé un tourbillon suivant la même méthode mais à plus petite échelle. Ils vérifient la stabilité de leur tourbillon en contrôlant la valeur minimum du nombre de Richardson $Ri = N^2/(\partial_z u)^2$ selon deux critères,

$$Ri > Ri_1 = \frac{f + 2u/r}{f + u/r + \partial_r u}, \quad (5.41)$$

critère de stabilité linéaire pour un tourbillon circulaire barocline, relatif à la théorie non visqueuse d'Ooyama [53] et,

$$Ri > Ri_2 = \frac{f(Sc + 1)^2}{4Sc(f + \partial_r u)}, \quad (5.42)$$

relatif à l'instabilité de double diffusion de McIntyre [46] pour la masse et la quantité de mouvement. On a $Ri_1 \sim 1$ et $Ri_2 \sim 175$ en ordre de grandeur et dans notre cas Ri_1 ne dépasse pas la valeur 1.6, et Ri_2 ne dépasse pas la valeur 260, valeur atteinte pour $r = 40\text{cm}$. Or dans notre cas, $Ri \simeq 3.6 \cdot 10^5$, donc le tourbillon est stable vis-à-vis de ces deux critères, alors que le tourbillon de Hedstrom et Armi était instable par rapport au critère de McIntyre. Cependant, on pourra également noter que Hedstrom et Armi ont utilisé une cuve de faible dimension par rapport à la taille du tourbillon. Ils peuvent obtenir des solutions elliptiques ou tripolaires plus facilement à cause des effets de bords qui ont plus d'influence : la taille de leurs tourbillons atteint 80 cm pour une cuve de 120 cm de diamètre.

4 Rapport d'aspect et profil de densité

La figure 5.20 représente le profil obtenu après injection d'un volume de 300 L de fluide de densité constante au centre de la cuve.

On voit sur cette figure que le tourbillon a une épaisseur de 11 cm. On peut donc raisonnablement penser que le tourbillon de 20 L discuté précédemment a une épaisseur de $11 \text{ cm} \times (20/300)^{1/3} \simeq 4.5 \text{ cm}$ sur laquelle la densité est constante. Ainsi la discussion précédente est valable pour $z > 2.5 \text{ cm} \simeq 0^+$. La discrétisation selon la verticale du profil de vitesse n'est pas suffisante pour obtenir le profil de vitesse à l'intérieur de la zone homogène. Aubert *et al.* [1] se sont justement intéressés au rapport d'aspect $\alpha = H/L$ d'un tel tourbillon créé par injection de fluide de densité homogène dans une cuve d'eau stratifiée tournante. Ils obtiennent la relation

$$\alpha = \frac{H}{L} = \left(\frac{Ro(1 + Ro)}{N_c^2 - N^2} \right)^{1/2} f, \quad (5.43)$$

où H et L correspondent à la demi-hauteur et au rayon du tourbillon, et N_c la stratification du tourbillon dans le cœur, que l'on suppose égale à zéro. En prenant d'après la figure 5.14, $Ro = -0.26$, $N^2 = 0.36$ et $f = 0.15$, le rapport d'aspect prend la valeur $\alpha = 0.11$. L'extension radiale du tourbillon L se fait sur 35 cm, ce qui implique d'après la relation (5.43) que $H \simeq 3.5 \text{ cm}$, ce qui est cohérent avec l'estimation précédente basée sur le modèle d'Aubert *et al.*.

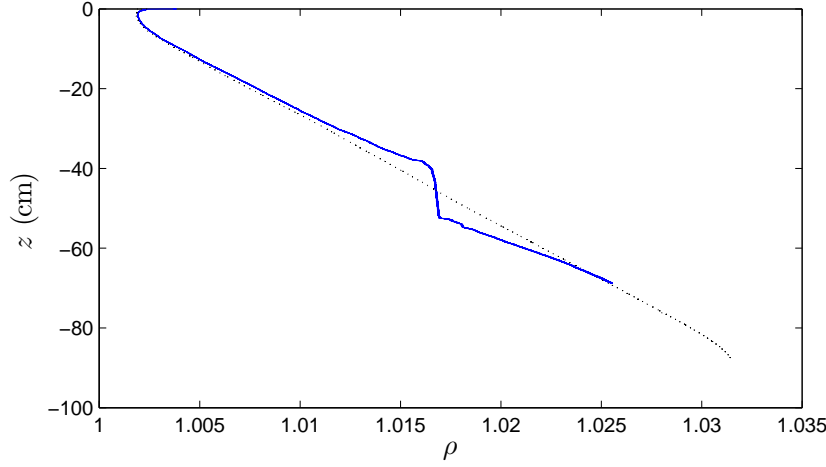


FIGURE 5.20 – Profil de densité typique pour un tourbillon généré avec la méthode discutée dans le texte. Le volume injecté, de densité homogène $\rho = 1.0171 \text{ kg.L}^{-1}$, est de 300 L. La ligne pointillée est la stratification du fluide loin du tourbillon. La ligne pleine représente un profil de densité au centre du tourbillon.

5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait une étude préliminaire de génération de tourbillons lenticulaires en milieu stratifié tournant ou non tournant. En milieu stratifié non tournant, nous avons montré que nous pouvions générer des tourbillons lenticulaires dont la dynamique est uniquement soumise à la diffusion visqueuse. La méthode de génération permet de créer des tourbillons stables dont l'évolution spatiale au cours du temps est comparée avec un modèle analytique de façon probante. Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à des tourbillons lenticulaires en milieu stratifié tournant. L'utilisation de la plateforme Coriolis a permis d'atteindre de grandes échelles et de montrer la structure tri-dimensionnelle des tourbillons générés. Ces derniers sont stables et quasi-axisymétriques.

Remerciements

Le travail de recherche à l'ENS Lyon et au LEGI a été soutenu par les subventions ANR-08-BLAN-0113-01 « PIWO » et « CIBLE 2010 » de la Région Rhône-Alpes.

Conclusion

J'avais pour objectif dans cette étude de mieux comprendre la dissipation des ondes dans l'océan à travers l'étude expérimentale d'interactions non linéaires d'ondes gravito-inertielles. En me focalisant sur quelques expériences idéalisées, j'ai pu montrer la richesse de la nature non-linéaire des ondes internes.

1 - J'ai observé pour la première fois de façon expérimentale le phénomène d'instabilité paramétrique sous-harmonique en fluide tournant, problème fondamental du point de vue des ondes inertielles mais aussi de la turbulence en rotation. Cette mise en évidence s'est effectuée simplement à travers l'interaction de trois ondes planes bi-dimensionnelles. Ceci a été obtenu grâce à l'utilisation astucieuse d'un générateur d'ondes planes adéquat.

2 - J'ai montré également que sous certaines conditions, une onde plane interne de gravité peut créer un écoulement moyen de grande ampleur au sein du fluide stratifié. Ce phénomène, dû à l'interaction de l'onde avec elle-même, a une grande portée pour expliquer le déplacement de sédiments ou de nutriments à l'intérieur de l'océan.

3 - Pour observer de tels phénomènes, j'ai perfectionné le générateur d'ondes internes créé au sein du laboratoire il y a plusieurs années. J'ai proposé une modification pertinente des cames mettant en mouvement les plaques du générateur afin de pouvoir choisir plus finement les paramètres de l'onde émise. Si auparavant, la longueur d'onde et l'amplitude de l'onde émise étaient fixées à la fabrication des cames, ce n'est plus le cas aujourd'hui. L'amplitude peut varier de façon continue pour chaque came permettant de choisir les paramètres adaptés à l'expérience que l'on veut mettre en place. La condition aux limites permettant la génération des ondes est maintenant choisie et non plus subie. Ce générateur multifonctions peut se transformer en générateur d'ondes planes, de modes verticaux, de profil type Thomas et Stevenson, tout en s'adaptant à la géométrie de la cuve utilisée. Cet outil a donc permis de générer des ondes internes de gravité de grande amplitude sans mélanger le fluide, d'où l'observation de l'écoulement moyen, lié au carré de l'amplitude de l'onde émise.

4 - J'ai également utilisé ce générateur pour émettre des ondes planes inertielles, alors qu'il était initialement prévu pour générer des ondes internes de gravité. Bien que la condition aux limites dans la direction transverse de l'onde ne soit pas vérifiée, la qualité des ondes planes émises est remarquable.

5 - J'ai aussi créé d'autres structures à méso-échelle à travers la génération de tourbillons lenticulaires en milieu stratifié tournant ou non tournant. Les solutions axisymétriques des équations régissant les fluides stratifiés tournants sont d'une importance capitale par leur présence forte dans l'océan. Cette génération de tourbillons a pu se faire à plusieurs échelles validant les modèles utilisés.

Perspectives

Au cours de cette thèse, j'ai travaillé au sein de cinq équipes différentes dans cinq laboratoires dont un directement en milieu naturel, l'océan. J'ai collaboré avec plus de quinze chercheurs à travers le monde sur le sujet. Cela m'a apporté une ouverture sans précédent sur ce domaine particulier de la physique. Découvrir de nouveaux phénomènes et tenter de les expliquer amène automatiquement de nombreux questionnements et sujets de recherche. Je donne ici quelques exemples qui prolongeront mon travail ou sur lesquels j'aimerais apporter une solution.

1 - Une première approche de la prise en compte du caractère tri-dimensionnel des ondes générées a été élaborée. L'écoulement moyen de forte amplitude, observé à l'intérieur d'une cuve de taille plus grande que la dimension transverse de l'onde, est lié à la taille finie du générateur dans sa dimension transverse. Théoriquement, cet écoulement devrait disparaître si le générateur a la largeur de la cuve étudiée.

2 - Ceci permettrait l'étude de l'interaction d'une onde interne bi-dimensionnelle avec les tourbillons générés au cours de la thèse. Un tel générateur modulable en largeur est en cours d'étude au sein du laboratoire. Ainsi, si la génération de tourbillons est bien maîtrisée, et qu'un nouveau générateur évitant la formation d'écoulements moyens est fabriqué, l'étude des interactions ondes-tourbillons prendra un nouveau tournant.

3 - Enfin, les phénomènes de dissipation impliquent souvent des phénomènes de mélange. Je n'ai pas utilisé la technique de LIF (*Laser-induced fluorescence*), mais cette dernière, en cours de développement au sein du laboratoire, permettra de mieux les caractériser.

Bibliographie

- [1] O. Aubert, M. Le Bars, P. Le Gal, and P. S. Marcus. The universal aspect ratio of vortices in rotating stratified flows : Experiments and observations. *J. Fluid Mech.*, FirstView :1–11, 2012. doi :10.1017/jfm.2012.176.
- [2] M. Beckers, R. Verzicco, H. J. H. Clercx, and G. J. F. Van Heijst. Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid : experiments, models and numerical simulations. *J. Fluid Mech.*, 433 :1–27, 2001.
- [3] D. Benielli and J. Sommeria. Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *J. Fluid Mech.*, 374 :117, 1998.
- [4] G. P. Bewley, D. P. Lathrop, L. R. M. Maas, and K. R. Sreenivasan. Inertial waves in rotating grid turbulence. *Phys. Fluids*, 19 :071701, 2007.
- [5] P. Billant and J. M. Chomaz. Theoretical analysis of the zigzag instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 419 :29–63, 2000.
- [6] P. Billant and J.-M. Chomaz. Self-similarity of strongly stratified flows. *Phys. Fluids*, 13(6) :1645–1651, 2001.
- [7] G. Bordes, F. Moisy, T. Dauxois, and P.-P. Cortet. Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid. *Phys. Fluids*, 24 :014105, 2012.
- [8] G. Bordes, A. Venaille, S. Joubaud, P. Odier, and T. Dauxois. Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves. *Phys. Fluids*, 24, 2012. doi :10.1063/1.4745880.
- [9] F. P. Bretherton. On the mean motion induced by internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 36 :785–803, 1969.
- [10] C. Cambon, R. Rubinstein, and F. S. Godeferd. Advances in wave turbulence : rapidly rotating flows. *New J. Phys.*, 6 :73, 2004.
- [11] X. J. Carton, G. R. Flierl, and L. M. Polvani. The generation of tripoles from unstable axisymmetric isolated vortex structures. *Europhys. Lett.*, 9 :339–344, 1989.
- [12] J. G. Charney and M. E. Stern. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 19 :159, 1962.
- [13] P.-P. Cortet, C. Lamriben, and F. Moisy. Viscous spreading of an inertial wave beam in a rotating fluid. *Phys. Fluids*, 22(9), 2010.
- [14] V. Croquette and H. Williams. Nonlinear waves of the oscillatory instability on finite convective rolls. *Physica D*, 37 :300–314, 1989.

-
- [15] T. Dauxois and W. R. Young. Near critical reflection of internal waves. *J. Fluid Mech.*, 390 :271–295, 1999.
- [16] Y. Duguet, J. F. Scott, and L. Le Penven. Instability inside a rotating gas cylinder subject to axial periodic strain. *Phys. Fluids*, 17 :114103, 2005.
- [17] Y. Duguet, J. F. Scott, and L. Le Penven. Oscillatory jets and instabilities in a rotating cylinder. *Phys. Fluids*, 18 :104104, 2006.
- [18] A. Fincham and G. Delerce. Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Exp. Fluids*, 29 :13, 2000.
- [19] J.-B. Flór, J. W. M. Bush, and M. Ungarish. An experimental investigation of spin-up from rest of a stratified fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 98 :277–296, 2004.
- [20] J.-B. Flor, M. Ungarish, and J. W. M. Bush. Spin-up from rest in a stratified fluid : boundary flows. *J. Fluid Mech.*, 472 :51–82, 2002.
- [21] D. Fultz. A note on overstability and the elastoid-inertia oscillations of kelvin, soldberg, and bjerknæs. *J. Meteo.*, 16 :199–207, 1959.
- [22] S. Galtier. Weak inertial-wave turbulence theory. *Phys. Rev. E*, 68 :015301(R), 2003.
- [23] DaVis LaVision GmbH. Anna-Vandenhoeck-Ring 19, 37081 Goettingen, Germany.
- [24] R. Godoy-Diana, J.-M. Chomaz, and C. Donnadieu. Internal gravity waves in a dipolar wind : a wave-vortex interaction experiment in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, 548 :281–308.
- [25] L. Gostiaux, T. Dauxois, H. Didelle, J. Sommeria, and S. Viboud. Quantitative laboratory observations of internal wave reflection on ascending slopes. *Phys. Fluids*, 18 :056602, 2006.
- [26] L. Gostiaux, H. Didelle, S. Mercier, and T. Dauxois. A novel internal waves generator. *Exp. Fluids*, 42 :123–130, 2007.
- [27] H. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, London, 1968.
- [28] K. Hedstrom and L. Armi. An experimental study of homogeneous lenses in a stratified rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, 191 :535–556, 1988.
- [29] E. J. Hopfinger, J.-B. Flór, J.-M. Chomaz, and P. Bonneton. Internal waves generated by a moving sphere and its wake in a stratified fluid. *Exp. Fluids*, 11 :255–261, 1991.
- [30] T. M. S. Johnston, M. A. Merrifield, and P. E. Holloway. Internal tide scattering at the line islands ridge. *J. Geo. Res.*, 108 :3365, 2003.
- [31] S. Joubaud, J. Munroe, P. Odier, and T. Dauxois. Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Phys. Fluids*, 24 :041703, 2012.
- [32] B. King, H. P. Zhang, and H. L. Swinney. Tidal flow over three-dimensional topography in a stratified fluid. *Phys. Fluids*, 21 :116601, 2009.
- [33] C. R. Koudella and C. Staquet. Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave. *J. Fluid Mech.*, 548 :165–196, 2006.

- [34] E. Kunze and S. G. Llewellyn Smith. The role of small-scale topography in turbulent mixing of the global ocean. *Oceanography*, 17 :55, 2004.
- [35] C. Lamriben, P.-P. Cortet, and F. Moisy. Direct measurements of anisotropic energy transfers in a rotating turbulence experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :024503, 2011.
- [36] C. Lamriben, P.-P. Cortet, F. Moisy, and L.R.M. Maas. Excitation of inertial modes in a closed grid turbulence experiment under rotation. *Phys. Fluids*, 23 :015102, 2011.
- [37] M. Leclair, N. Grisouard, L. Gostiaux, C. Staquet, and F. Auclair. Reflexion of a plane wave onto a slope and wave-induced mean flow. *Stratified Flows Conference, Roma*, 2011.
- [38] M.-P. Lelong and J. Riley. Internal wave-vortical mode interactions in strongly stratified flows. *J. Fluid Mech.*, 232 :1–19, 1991.
- [39] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, London, 1978.
- [40] L.R.M. Maas. Wave focusing and ensuing mean flow due to symmetry breaking in rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, 437 :13–28, 2001.
- [41] J. A. MacKinnon and K. B. Winters. Subtropical catastrophe : Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°. *Geophys. Res. Lett.*, 32 :L15605, 2005.
- [42] R. Manasseh. Distortions of inertia waves in a rotating fluid cylinder forced near its fundamental mode resonance. *J. Fluid Mech.*, 265 :345–370, 1994.
- [43] M. Mathur and T. Peacock. Internal wave interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :118501, 2010.
- [44] A. D. McEwan. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.*, 40 :603–639, 1970.
- [45] A. D. McEwan. Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 50, 1971.
- [46] M. E. McIntyre. Diffusive destabilization of the baroclinic circular vortex. *Geophys. Fluid Dyn.*, 1 :19–57.
- [47] M. Mercier, N. Garnier, and T. Dauxois. Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform. *Phys. Fluids*, 20 :0866015, 2008.
- [48] M. Mercier, D. Martinand, M. Mathur, L. Gostiaux, T. Peacock, and T. Dauxois. New wave generation. *J. Fluid Mech.*, 657 :308–1334, 2010.
- [49] L. Messio, C. Morize, M. Rabaud, and F. Moisy. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Exp. Fluids*, 44 :519–528, 2008.
- [50] P. Meunier, C. Eloy, R. Lagrange, and F. Nadal. A rotating fluid cylinder subject to weak precession. *J. Fluid Mech.*, 599 :405–440, 2008.
- [51] F. Moisy. *PIVMat toolbox for Matlab*. <http://www.fast.u-psud.fr/pivmat>.
- [52] D. J. Olbers and N. Pomphrey. Disqualifying two candidates for the energy-balance of oceanic internal waves. *J. Phys. Ocean.*, 11 :1423, 1981.
- [53] K. Ooyama. On the stability of the baroclinic circular vortex : a sufficient criterion for instability. *J. Atmos. Sci.*, 23 :43–53.

-
- [54] G. Oster. Density gradients. *Sci. Am.*, 213 :70–76, 1965.
- [55] T. Peacock, M.J. Mercier, H. Didelle, S. Viboud, and T. Dauxois. A laboratory study of low-mode internal tide scattering by finite-amplitude topography. *Phys. Fluids*, 21 :121702, 2009.
- [56] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
- [57] O.M. Phillips. Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Phys. Fluids*, 6(4) :513, 1963.
- [58] L. Rayleigh. On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math Soc.*, 11 :57, 1880.
- [59] P. Sagaut and C. Cambon. *Homogeneous turbulence dynamics*. Cambridge University Press, London, 2008.
- [60] L. Smith and F. Waleffe. Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating, three-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 11(6) :1608, 1999.
- [61] J. Sommeria. *Uvmat toolbox for matlab*. LEGI / CNRS-UJF-INPG. <http://coriolis.legi.grenoble-inp.fr>.
- [62] P. J. Staplehurst, P. A. Davidson, and S. B. Dalziel. Structure formation in homogeneous freely decaying rotating turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2008.
- [63] C. Staquet and J. Sommeria. Internal gravity waves : From instabilities to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 34 :559–593, 2002.
- [64] A. Stegner and D. G. Dritschel. A numerical investigation of the stability of isolated shallow water vortices. *J. Phys. Ocean.*, 30 :2562–2573, 2000.
- [65] B. R. Sutherland, S.B. Dalziel, G.O. Hughes, and P.F. Linden. Visualization and measurement of internal waves by synthetic schlieren. Part 1. Vertically oscillating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 390 :93–126, 1999.
- [66] A. Tabaei and T. R. Akylas. Nonlinear internal gravity wave beams. *J. Fluid Mech.*, 482 :141–161, 2003.
- [67] A. Tabaei, T. R. Akylas, and K. G. Lamb. Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams. *J. Fluid Mech.*, 526 :217–243, 2005.
- [68] S. A. Thorpe. On standing internal gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, 1969.
- [69] R. R. Trieling. *Two-Dimensional Vortices in Strain and Shear Flows*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
- [70] G. K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. London, 2006.
- [71] F. Waleffe. The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids A*, 4 (2) :350, 1992.
- [72] F. Waleffe. Inertial transfers in the helical decomposition. *Phys. Fluids A*, 5 (3) :577, 1993.

RÉSUMÉ

Les ondes gravito-inertielles jouent un rôle majeur dans les échanges d'énergie globaux sur la planète. Si la génération des ondes est bien connue dans l'atmosphère et l'océan, le devenir de ces ondes au cours de leur propagation n'est pas complètement défini aujourd'hui. Ces ondes peuvent interagir de façon non-linéaire avec elles-mêmes et créer des structures de plus petite échelle qui vont se dissiper plus facilement. Ainsi, le phénomène d'instabilité paramétrique sous-harmonique (PSI), a été étudié de façon expérimentale. Nous avons effectué la première mise en évidence expérimentale de l'interaction de trois ondes planes inertielles bi-dimensionnelles, sous la forme d'une triade résonnante. Cette étude améliore en outre la compréhension de la turbulence en rotation. Les ondes internes peuvent aussi créer, ou interagir avec des écoulements lents de grande échelle qui peuvent modifier la biodiversité au fond des océans. Nous avons mis en évidence une situation expérimentale à l'origine d'un tel écoulement moyen induit par les ondes et, à l'aide d'un modèle théorique simplifié, nous avons expliqué la formation de ces écoulements. Enfin, on étudie également des tourbillons en fluide stratifié pour permettre de futures études sur l'interaction d'ondes gravito-inertielles avec des tourbillons.

ABSTRACT

Inertia-gravity waves play a major role in the global transfer of energy on Earth. Even if wave generation is well understood in the atmosphere and in the ocean, their subsequent evolution is not completely understood. These waves can interact nonlinearly with themselves and create small-scales structures that dissipate more rapidly. Motivated by this, the phenomenon of parametric subharmonic instability (PSI), was studied experimentally. We conducted the first laboratory demonstration of the interaction of three two-dimensional inertial plane waves, as a resonant triad. Inertia-gravity waves can also interact with, and create, mean flows of large scale that can modify the transport of energy, chemical and biological compounds, and thereby have an impact on biodiversity in the ocean. We therefore also demonstrated an experimental situation that gives rise to such a flow field and using a simplified theoretical model, we explained the formation of this flow. Finally, we performed some studies of vortices in stratified fluid, to assist future studies of the interaction of inertia-gravity waves with vortices.
